Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 5p

Distanskurs
25 augusti, 2006 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Definiera begreppet riktningsderivata till en funktion av flera variabler och visa, med motivering, hur denna kan beräknas utifrån funktionens gradient. (3p)

   Lösning: (Se s. 78 i *Analys i flera variabler* av Persson och Böiers.) $\square$

2. Bestäm tangentplanet till $f(x,y) = 3x^2y + y^3$ i punkten $(-2,1)$. (3p)

   Lösning: Vi har att de partiella derivatorna är $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$ så $f(-2,1) = 13$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = -12$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = 15$. Taylorutveckling kring $(-2,1)$ ger att $f(x,y) = 13 + (-12)\cdot(x+2) + 15\cdot(y-1) + \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}\varrho(x+2, y-1)$ varmed tangentplanet är $z = 13 - 12x - 24 + 15y - 15 = -26 - 12x + 15y$. $\square$

3. Välj värden på $a, b \in \mathbb{R}$ så att $u(t,x) = \sin(at - x) + \cos(bt - x)$ blir en lösning till vågekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (3p)

   Lösning: Först beräknas de partiella derivatorna $\frac{\partial u}{\partial t} = a\cos(at-x) - b\sin(bt-x) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2\sin(at-x) - b^2\cos(bt-x)$ och $\frac{\partial u}{\partial x} = -\cos(at-x) + \sin(bt-x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(at-x) - \cos(bt-x)$ varmed $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2\sin(at-x) - b^2\cos(bt-x) - 4\cdot(-\sin(at-x) - \cos(bt-x)) = (4-a^2)\sin(at-x) + (4-b^2)\cos(bt-x)$. Därmed måste $a^2 = b^2 = 4$, dvs $(a,b) \in \{(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2)\}$ är de möjliga värdena på konstanterna a, b. $\square$

4. Bestäm $f(x,y)$ om vi har att

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (1+2x)e^{2x+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xye^{2x+y^2} + e^y \\ f(-1,-1) &= 0 \end{cases}$$

(3p)

Lösning: Låt oss integrera $\frac{\partial f}{\partial y}$ m.a.p. y och se om vi genom att derivera det uttrycket får $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ty i så fall är uttrycket $f(x,y)$. $g(x,y) = \int (2xye^{2x+y^2} + e^y)\,dy = xe^{2x+y^2} + e^y + C(x)$. Om vi deriverar g m.a.p. x får vi $\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \cdot e^{2x+y^2} + 2xe^{2x+y^2} + C'(x) = (1+2x)e^{2x+y^2} + C'(x)$ varmed $f = g$ om $C'(x) = 0$ vilket innebär att $C(x)$ måste vara en konstant m.a.p. x och y. Slutligen har vi $0 = f(-1,-1) = (-1) \cdot e^{2\cdot(-1)+(-1)^2} + e^{-1} + C = C$, dvs $C = 0$ och $f(x,y) = xe^{2x+y^2} + e^y$. $\square$

5. Ange maximal definitions- och värdemängd för $f(x,y) = \ln(x + 2y - \sqrt{8xy})$. (3p)

Lösning: Kvadratroten är definierad då dess argument är positivt. Därmed är det ok att [både $x \geq 0$ och $y \geq 0$] eller att [både $x \leq 0$ och $y \leq 0$] (ty då är $\sqrt{8xy} > 0$. Om $x \geq 0$ och $y \geq 0$ ger kvadratkomplettering att $x + 2y - \sqrt{8xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{2y})^2$ som är 0 längs linjen $x = 2y$ men för övrigt positivt, varmed f är definierat för $(x,y) \in \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x \neq 2y\}$. Däremot kan inte [$x < 0$ och $y > 0$] eller [$x > 0$ och $y < 0$] ty då är $xy < 0$ varmed $\sqrt{8xy}$ ej är definierat. Om [$x \leq 0$ och $y \leq 0$ och $x \neq 2y$] så är visserligen $\sqrt{8xy}$ väldefinierat men $x+2y-\sqrt{8xy} < 0$ varmed logaritmen är är definierad i detta fall. Totalt är alltså maximal definitionsmängd $\mathcal{D}_f = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x \neq 2y\}$. Där antar uttrycket $x + 2y - \sqrt{8xy}$ alla positiva värden varmed maximal värdemängd för f är $\mathcal{V}_f = \mathbb{R}$. $\square$

6. Avgör om fältet $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (\frac{y}{x+z},\ \ln(x+z),\ \frac{y}{x+z})$ är virvelfritt. (2p)

Lösning: Låt oss beteckna $\boldsymbol{u} = (P,Q,R)$. Då är $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} =$
$= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = \left(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{x+z},\ -\frac{y}{(x+z)^2} - (-\frac{y}{(x+z)^2}),\ \frac{1}{x+z} - \frac{1}{x+z}\right) =$
$= (0,0,0)$. Alltså är fältet virvelfritt! $\square$

7. Bestäm alla stationära punkter till

$$f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2} \quad \text{där } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

(4p)

Lösning:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1\cdot(1+x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)\cdot 2x}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} = \dfrac{1-x^2+y^2+z^2-2xy-2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1+x^2-y^2+z^2-2xy-2yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1+x^2+y^2-z^2-2xz-2yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \end{cases}$$

Eftersom $x^2+y^2+z^2 \geq 0$ för alla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ så är $(1+x^2+y^2+z^2)^2 > 0$ varmed $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (0,0,0)$ är ekvivalent med att

$$\begin{cases} 1-x^2+y^2+z^2-2xy-2xz &= 0 \quad (1) \\ 1+x^2-y^2+z^2-2xy-2yz &= 0 \quad (2) \\ 1+x^2+y^2-z^2-2xz-2yz &= 0 \quad (3) \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $2+2z^2-4xy-2xz-2yz=0 \Rightarrow 2xy=1+z^2-xz-yz \overset{(2)}{\Rightarrow}$ $1+x^2-y^2+z^2-(1+z^2-xz-yz)-2yz=0 \Rightarrow x^2-y^2+xz-yz=0 \Rightarrow$ $(x-y)(x+y)+(x-y)z)=0 \Rightarrow (x-y)(x+y+z)=0$ varmed antingen $x=y$ eller $x+y+z=0$ (eller båda). Men om $x+y+z=0$ ger $z=-x-y$ insatt i (3) att $0=1+x^2+y^2-(-x-y)^2-2x(-x-y)-2y(-x-y)=1+x^2+y^2+(x+y)^2>0$ vilket är en motsägelse. Alltså måste $x=y$.

Genom att addera (1) och (3) respektive (2) och (3) och sedan sätta in i (1) respektive (3) på samma sätt som ovan fås att $(x+z)(x+y+z)=0$ och $(y+z)(x+y+z)=0$ varmed vi ansätter $x=y=z=t$ vilket genom (1) ger $0=1-t^2+t^2+t^2-2t^2-2t^2=1-3t^2 \Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ varmed lösningarna är $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$ och $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$. $\square$

8. Beräkna $\int_\gamma (xy+\sin x)\,dx+(x^3+ye^{y^2})\,dy$ där γ är kvartscirkeln längs $x^2+y^2=1$ från $(-1,0)$ till $(0,-1)$. (5p)

Lösning: Bilda den slutna kurvan $\Gamma=\gamma+\gamma_1+\gamma_2$ där γ är kvartscirkeln längs $x^2+y^2=1$ från $(-1,0)$ till $(0,-1)$, γ_1 är linjestycket från $(0,-1)$ till origo och γ_2 är linjestycket från origo till $(-1,0)$ och låt $P=xy+\sin x$ och $Q=x^3+ye^{y^2}$. Då är $\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy=\int_\gamma P\,dx+Q\,dy+\int_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{\gamma_2} P\,dx+Q\,dy$. Om man nu låter D beteckna det inre av Γ så är enligt Greens formel $\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy=$
$=\int_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy=\int_D(3x^2-x)\,dx\,dy \quad \left\{\begin{array}{ll} x=r\cos\theta & 0\le r\le 1 \\ y=r\sin\theta & \pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\end{array}\right\} =$
$=\int_\pi^{3\pi/2}\int_0^1(3r^2\cos^2\theta-r\cos\theta)r\,dr\,d\theta=3\int_0^1 r^3dr\int_\pi^{3\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\,d\theta-\int_0^1 r^2dr\int_\pi^{3\pi/2}\cos\theta\,d\theta=$
$=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 3\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi)-\frac{1}{3}\cdot(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\pi)=\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{3}$. Vidare är $\int_{\gamma_1}(xy+\sin x)\,dx+(x^3+ye^{y^2})\,dy=\int_{-1}^0 te^{t^2}dt=\frac{1}{2}(1-e)$ och $\int_{\gamma_2}(xy+\sin x)\,dx+(x^3+ye^{y^2})\,dy=\int_0^{-1}(-t\cdot 0\sin(-t))\cdot(-1)\,dt=\int_{-1}^0(-\sin t)\,dt=1-\cos 1$. Alltså är $\int_\gamma(xy+\sin x)\,dx+(x^3+ye^{y^2})\,dy=\frac{3\pi}{16}-\frac{7}{6}+\frac{e}{2}+\cos 1$. $\square$

9. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{x+2y}dx\,dy \quad \text{där } D \text{ är fyrkanten med hörn i } (0,0),(-1,1),(3,2),(4,1)$$ (4p)

Lösning: Fyrkanten är en parallellogram med begränsningslinjerna $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ och $y=\frac{1}{4}x$ respektive $y=-x+5$ och $y=-x$ varmed området D kan är $\{(x,y)\,:\,-5\le x-4y\le 0 \text{ och } 0\le x+y\le 5\}$. Därmed är det lämpligt att göra substitutionen $u=x-4y$ och $v=x+y$ vilket är ekvivalent med att $x=\frac{1}{5}(u+4v)$ och $y=\frac{1}{5}(v-4u)$ med Jacobianen $\frac{d(u,v)}{d(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & -4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5$ varmed $\iint_D e^{x+2y}dx\,dy=\int_0^5\int_{-5}^0 e^{\frac{1}{5}(u+4v)+\frac{2}{5}(v-u)}\frac{1}{5}\,du\,dv=\frac{1}{5}\int_0^5\int_{-5}^0 e^{-\frac{1}{5}u+\frac{6}{5}v}du\,dv=$ $\frac{1}{5}\int_0^5 e^{\frac{6}{5}v}([-5e^{-\frac{1}{5}u}]_{-5}^0)\,dv=\frac{125}{6}(e^{-1}-1)(e^6-1)$. $\square$