Lösningar till Tentamen i Flervariabelanalys, 5p

Distanskurs

27 maj, 2006 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Antag att $f(s,x)$ och $\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)$ är kontinuerliga på $(\alpha,\beta)\times[a,b]$.
   Bevisa att $\frac{d}{ds}\int_a^b f(s,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx$ för $\alpha < s < \beta$. (3p)

   Lösning: (Se s. 184 i *Analys i flera variabler* av Persson och Böiers.) $\square$

2. Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i förekommande fall.
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+y^2}$ (3p)
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2-2x+2)}{x^2+y^2-2x+1}$ (3p)

   Lösning:
   (a) Låt först $(x,y)=(t,t)$. Då är $\frac{xy}{2x^2+y^2} = \frac{t^2}{2t^2+t^2} = \frac{1}{3}$ då $t\to 0$. Låt sedan istället $(x,y)=(0,t)$ så är $\frac{xy}{2x^2+y^2} = \frac{0}{t^2} = 0$ då $t\to 0$. Alltså existerar inte gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+y^2}$.
   (b) Kvadratkomplettering ger att $x^2+y^2-2x+1=(x-1)^2+y^2$ varmed
   $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2-2x+2)}{x^2+y^2-2x+1} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln((x-1)^2+y^2+1)}{(x-1)^2+y^2} \left\{\begin{array}{l} u=x-1 \\ v=y \end{array}\right\} =$$
   $$= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\ln(u^2+v^2+1)}{u^2+v^2} \left\{\begin{array}{l} u=r\cos\theta \\ v=r\sin\theta \end{array}\right\} = \lim_{r\to 0} \frac{\ln(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+1)}{r^2\cos^2\theta+\sin^2\theta} =$$
   $$= \lim_{r\to 0} \frac{\ln(r^2+1)}{r^2} = 1$$ oberonde av θ, dvs oberoende av hur man närmar sig $(0,0)$.
   $\square$

3. Bestäm samtliga lokala extrempunkter till $f(x,y) = x^3 + 3y^2 + 6xy - 9x$. (3p)

Lösning: $f(x,y) = x^3+3y^2+6xy-9x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+6y-9=0 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6y+6x=0 & (2) \end{cases} \quad (2) \Rightarrow$

$x=-y \overset{(1)}{\Rightarrow} 3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$y = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$. Alltså är de stationära punkterna $(-1,1)$ och $(3,-3)$. För att få reda på vilka som är lokal extrempunkter (dvs lokalt minimum eller lokalt maximum) går vi nu vidare med att ta reda på punkternas karaktär.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$

$(-1,1)$: $Q(h,k) = -6h^2+2\cdot 6hk+6k^2 = 6(-(h-k)^2+2k^2)$ som är *indefinit* varmed punkten $(-1,1)$ är en *sadelpunkt*, dvs ingen extrempunkt.

$(3,-3)$: $Q(h,k) = 18h^2+2\cdot 6hk+6k^2 = 6(2h^2+(h+k)^2)$ som är *positivt definit* varmed punkten $(3,-3)$ är ett *lokalt minimum* och alltså den enda lokala extrempunkten. $\square$

4. Lös den partiella differentialekvationen $y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3$, $x > 0$ genom att göra substitutionen $s = x^2 - y^2$ och $t = y$. (3p)

Lösning: Med $\begin{cases} s = x^2 - y^2 \\ t = y \end{cases}$ har vi att

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 0 = 2x\frac{\partial f}{\partial s}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot(-2y) + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 1 = -2y\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$.

Därför är differentialekvationen $y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = y\cdot(2x\frac{\partial f}{\partial s}) + x\cdot(-2y\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t}) =$
$= 2xy\frac{\partial f}{\partial s} - 2xy\frac{\partial f}{\partial s} + x\frac{\partial f}{\partial t} = x\frac{\partial f}{\partial t} = 3x^3 \overset{x>0}{\Rightarrow} \frac{\partial f}{\partial t} = 3x^2$. Eftersom $\{s = x^2-y^2, t = y\} \Leftrightarrow \{x^2 = s+t^2, y = t\}$ har vi att $\frac{\partial f}{\partial t} = 3(s+t^2) \Leftrightarrow f = 3st + t^3 + g(s)$, dvs $f(x,y) = 3(x^2-y^2)y + y^3 + g(x^2-y^2) = 3x^2y - 2y^3 + g(x^2-y^2)$. $\square$

5. Beräkna $\iint\limits_D \frac{y}{x+1}\,dx\,dy$ där D är triangelytan med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. (3p)

Lösning: $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le 2-x\}$ så $\iint\limits_D \frac{y}{x+1}\,dx\,dy = \int_0^1 (\int_x^{2-x} \frac{y}{x+1}\,dy)\,dx =$
$= \int_0^1 \frac{1}{x+1}[\frac{y^2}{2}]_x^{2-x}\,dx = \int_0^1 \frac{(2-x)^2-x^2}{2(x+1)}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx \left\{ \begin{array}{l} u = 1+x \\ du = dx \end{array} \right\} = 2\int_1^2 \frac{-u+2}{u}\,du =$
$= 2[-u+2\ln u]_1^2 = 2(2\ln 2 - 1)$. $\square$

6. Omberg beskrivs i stora drag av ytan $z = \frac{1}{12}(99 - 3x^2 - y^2 + 2xy)$, där Borghamn är beläget i punkten $(5, 12, 0)$ och Hälle källor i $(1, -4, 6)$. Antag att man gör en utflykt från Borghamn till Hälle källor längs en stig vars ortogonalprojektion på xy-planet är en rät linje. Antag att vi vill pausa där det är plant i stigens riktning – i vilken punkt kan då det göras? (4p)

Lösning: Ortogonalprojektionen av stigen på xy-planet är linjen från $(5, 12, 0)$ till $(1, -4, 0)$, eller från $(5, 12)$ till $(1, -4)$ i xy-koordinater, så den har riktningsvektor $(1, -4) - (5, 12) = (-4, -16) \,//\, (-1, -4)$ så den normerade riktningsvektorn i xy-planet är r $= \frac{1}{\sqrt{17}}(-1, -4)$. Linjen från $(5, 12)$ till $(1, -4)$ är $y = \frac{12-(-4)}{5-1}x + b = 4x + b$ där konstanten b bestäms av att $-4 = 4 \cdot 1 + b \;\Rightarrow\; b = -8 \;\Rightarrow\; y = 4(x - 2)$ $(*)$. Riktningsderivatan av $f(x, y) = \frac{1}{12}(99 - 3x^2 - y^2 + 2xy)$ i stigens riktning är därmed $f'_{\boldsymbol{r}}(x, y) = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{r} = \frac{1}{12}(-6x + 2y, -2y + 2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}(-1, -4) = = \frac{1}{6\sqrt{17}}(3x - y - (-4)y + (-4)x) = \frac{1}{6\sqrt{17}}(-x + 3y) \overset{(*)}{=} \frac{1}{6\sqrt{17}}(-x + 3 \cdot 4(x - 2)) = = \frac{1}{6\sqrt{17}}(11x - 24)$. Det är plant i stigens riktning då $0 = f'_{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{6\sqrt{17}}(11x - 24)$, dvs då $x = \frac{24}{11} \;\Rightarrow\; y(\frac{24}{11}) = \frac{8}{11} \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{12}(99 - 3 \cdot (\frac{24}{11})^2 - (\frac{8}{11})^2 + 2 \cdot \frac{24}{11} \cdot \frac{8}{11}) = \frac{961}{132}$ så bästa platsen för fikapausen är punkten $(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, \frac{961}{132})$.

Alternativt kan man räkna med att man parametriserar stigen enligt $(x, 4(x-2), \underbrace{\tfrac{1}{12}(99 - 3x^2 - 16(x-2)^2 + 8x(x-2))}_{=z(x)})$ varmed det är "plant i stigens riktning" där stigens tangent är parallell med xy-planet, dvs derivatan i z-led är noll: $0 = z'(x) \;\Leftrightarrow\; 0 = -6x - 32(x - 2) + 8(x - 2) + 8x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{24}{11}$. $\square$

7. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{y\,dx - 2x\,dy}{e^{x+y}}$$

där γ är kurvan $|x| + |y| = 1$ genomlöpt ett varv moturs. (4p)

Lösning: Den area som innesluts av γ är $D = \{(x, y) : -1 \le x + y \le 1, -1 \le x - y \le 1\}$. Låt $P = ye^{-x-y}$ och $Q = -2xe^{-x-y}$. Då kan integranden skrivas $P + Q$ där $\frac{\partial P}{\partial y} = (1 - y)e^{-x-y}$ och $\frac{\partial Q}{\partial x} = (x - 1)2e^{-x-y}$. Eftersom P och Q är kontinuerliga och deriverbara på hela D och γ är positivt orienterad har vi enligt Greens formel att $\int_\gamma \frac{y\,dx - 2x\,dy}{e^{x+y}} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy = \iint_D (x - 1)2e^{-x-y} - (1 - y)e^{-x-y} dx, dy = = \iint_D (2x + y - 3)e^{-(x+y)} dx\,dy \quad \left\{ \begin{array}{l} s = x + y \\ t = x - y \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(s + t) \\ y = \frac{1}{2}(s - t) \end{array} \quad \frac{d(x,y)}{d(s,t)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \right\} = = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-s} (\int_{-1}^1 (\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t - 3)\,dt)\,ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-s}(3s + 0 - 6)\,ds = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 e^{-s}(s - 2)\,ds = \frac{3}{2}[-e^{-s}(s - 2) - e^{-s}]_{-1}^1 = -3e$. $\square$

8. Beräkna det utåtriktade flödet av $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (xy, xz^2, x^2y)$ genom den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ där $y \geq 0$ och $z \geq 0$. (4p)

Lösning: Vi ska beräkna $\iint_{S_1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}_1 \, dS_1$ där $\boldsymbol{N}_1$ är den normerade utåtriktade normalen och $S_1 = \{(x,y,z) : z = 1 - x^2 - y^2, y \geq 0, z \geq 0\}$ är den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som begränsas av att $y \geq 0$ och $z \geq 0$. För att ta hjälp av Gauss sats vi beräkningen av denna ytintegral måste ytan vara sluten. Vi sluter den därför med skivsegmenten $S_2 = \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$ (parabelskiva) och $S_3 = \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, z = 0\}$ (halvcirkelskiva). Därmed kan $\iint_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N} \, dS$, flödet av $\boldsymbol{u}$ genom den slutna ytan $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, beräknas m.h.a. Gauss sats som $\iiint_T \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) \, dx\,dy\,dz$ där T är den kropp som ytan S begränsar. Slutligen kan man få flödet av $\boldsymbol{u}$ genom S_1 genom att subtrahera flödet genom S_2 och genom S_3.

S : Enligt Gauss sats (divergenssatsen) är flödet av $\boldsymbol{u} = (xy, xz^2, x^2y)$ genom S m.h.a. substitution till cylinderkoordinater $\iint_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N} \, dS = \iiint_T \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) \, dx\,dy\,dz =$

$$= \iiint_T y \, dx\,dy\,dz \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = r\cos\theta & 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, y \geq 0 \Leftrightarrow \\ y = r\sin\theta & \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 1 - r^2, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \quad \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r \right\} =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r\sin\theta \, dz \, r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \sin\theta \int_0^1 (1 - r^2 - 0) r^2 \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 d\theta = \frac{2}{15}[-\cos\theta]_0^\pi = \frac{2}{15}(-(-1) - (-1)) = \frac{4}{15}.$$

S_2 : Utåtriktad normal till S_2 är $\boldsymbol{N}_2 = (0, -1, 0)$ och $\boldsymbol{u}$ är $(0, xz^2, 0)$ på S_2 så flödet av $\boldsymbol{u}$ genom S_2 är $\iint_{S_2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}_2 \, dS_2 = \iint_{S_2} (-xz^2) \, dx\,dz = -\int_{-1}^1 (\int_0^{1-x^2} xz^2 \, dz) \, dx =$

$$-\int_{-1}^1 x\left(\frac{(1-x^2)^3}{3} - 0\right) dx = -\frac{1}{3}(x - 3x^3 + 3x^5 - x^7) \, dx \left\{ \begin{array}{c} \text{Udda funktion över} \\ \text{symmetriskt intervall} \end{array} \right\} = 0.$$

S_3 : Utåtriktad normal till S_3 är $\boldsymbol{N}_3 = (0, 0, -1)$ och $\boldsymbol{u}$ är $(xy, 0, x^2y)$ på S_3 så flödet av $\boldsymbol{u}$ genom S_3 är $\iint_{S_3} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}_3 \, dS_3 = \iint_{S_3} (-x^2y) \, dx\,dy = -\int\limits_{-1}^{1} x^2 \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx =$

$$= -\int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2}(1 - x^2) \, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = -\frac{2}{15}.$$

S_1 : Alltså får vi slutligen födet av $\boldsymbol{u}$ genom S_1 som

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}_1 \, dS_1 &= \iint_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N} \, dS - \iint_{S_2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}_2 \, dS_2 - \iint_{S_3} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}_3 \, dS_3 \\ &= \frac{4}{15} - 0 - \left(-\frac{2}{15}\right) \\ &= \frac{6}{15} \end{aligned}$$

$\square$