Högskolan i Halmstad

Kapitel 5: Primitiva funktioner

Primitiva funktioner är motsatsen till *derivata*.
Att **integrera** är motsatsen till att *derivera*.

Definition F är **primitiva funktion** till f om $F'(x) = f(x)$ för alla x i definitionsmängden D_f för f. Den primitiva funktionen till f betecknas även med $\int f(x)dx$ förkortat $\int f$. Det man integrerar, f, kallas **integrand**.

Obs! Primitiva funktioner är ej entydigt bestämda av sin integrand.

Exempel

1. Integrera $f(x) = 2x + 1$.
2. Visa att $\ln(3x + 2)$ är primitiv funktion till $\dfrac{1}{\frac{2}{3} + x}$

Lösning

1. $F(x) = x^2 + x$ är en godtagbar lösning eftersom man får f om man deriverar F. Emellertid är $F(x) = x^2 + x + 5$ ett lika bra svar. Tydligen är den primitiva funktionen endydig så när som på en *additiv konstant*! Därmed är alla funktioner på formen $F(x) = x^2+x+C$ godtagbara svar på denna uppgift.

2. För att visa att en viss primitiv funktion är korrekt är det bara att derivera för att kolla: $D(\ln(3x + 2)) = \frac{1}{3x+2} \cdot 3 = \frac{1}{x+2/3}$ (ok)
   Med den nyvunna kunskapen att additiva konstanter ej spelar roll kan vi dock även resonera på följande sätt:
   Att $F(x) = \ln(3x + 2)$ skulle vara primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{2/3+x}$ är detsamma som att $F(x) = \ln(3x + 2) + C$ skulle vara det där C är en godtycklig konstant. Speciellt med $C = -\ln 3$ har vi att
   $F(x) = \ln(3x + 2) + C = \ln(3(x + 2/3)) - \ln 3 = \ln 3 + \ln(x + 2/3) - \ln 3 = \ln(x + 2/3)$ och därmed är $f(x) = F'(x) = 1/(x + 2/3)$. □

Några **grundregler** och därtill hörande exempel är:

Regel		*Exempel*
$1: \int a\,dx = ax + C$	$\int 0\,dx = C$	$\int 1\,dx = x + C$
$2: \int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{om } \alpha \neq -1 \\ \ln x + C & \text{om } \alpha = -1 \end{cases}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(ax+b)^{3/2}}{3a} + C$
$3: \int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b}\,dx = e^{ax+b}/a + C$	$\int a^x\,dx = a^x/\ln a + C,\ a \neq 0$
$4: \int \cos x\,dx = \sin x + C$	$5: \int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \sin x\,\cos x\,dx = \cos(2x) + C$
$6: \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$7: \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	$\int \tan^2 x\,dx = x + \tan x + C$
$8: \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$9: \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{1+x^2}\rvert + C$	$\int \frac{1-\sqrt{1-x^{-2}}}{x\sqrt{1-x^{-2}}}\,dx = \ln\left\lvert 1+\sqrt{1-x^{-2}}\right\rvert$

Allmänna regler

$10: \int af = a\int f$	$11: \int (f+g) = \int f + \int g$	$12: \displaystyle\int f^a f' = \begin{cases} \frac{f^{a+1}}{a+1} + C & \text{om } a \neq -1 \\ \ln\lvert f\rvert + C & \text{om } a = -1 \end{cases}$
$13: \int fg = Fg - \int Fg'$ (partiell integration, förkortat P.I.)		

Exempel Integrera (a) $3x^2$ (b) $x(\sqrt{x} - ex)$ (c) $\sin x\,\cos x$

Lösning

(a) $\int 3x^2 dx \overset{(10)}{=} 3\int x^2\,dx \overset{(2)}{=} 3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} = x^3 + C$

(b) $\int x(\sqrt{x} - ex)\,dx = \int (x^{3/2} - ex^2)\,dx = \underbrace{\int x^{3/2}dx}_{I} - \underbrace{\int ex^2 dx}_{II}$

$I \overset{(6)}{=} \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + C = \frac{x^{1/2+2}}{5/2} + C = \frac{2}{5}\,x^2\sqrt{x} + C$

$II \overset{(1)}{=} e\int x^2 dx = e\,\frac{x^3}{3} + C = \frac{e}{3}\,x^3$

$I - II = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{e}{3}x^3 + C = x^2(\frac{2}{5}\sqrt{x} - \frac{e}{3}x) + C$

(c) $\int \sin x\,\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$
Vi har att $\int \sin x\,dx = -\cos x$
men $D(-\cos(2x)) = \sin(2x)\cdot 2$ (inre derivata!)
så $D(-\frac{1}{2}\cos(2x)) = \sin(2x)$ varmed
$\int \sin x\,\cos x\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$ $\square$

Exempel Beräkna (a) $\int \cos x\,dx - \int \cos^3 x\,dx$ (b) $\int (1+x^2)\ln x\,dx$

Lösning

(a) $\int \cos x\,dx - \int \cos^3 x\,dx \overset{(11)}{=} \int \cos x(1 - \cos^2 x)\,dx = \int \cos x\,\sin^2 x\,dx$
Eftersom $D(\sin^3 x) = 3\sin^2 x\,\cos x$ så är $D(\frac{1}{3}\sin^3 x) = \sin^2 x\,\cos x$ varmed
$\int \cos x\,dx - \int \cos^3 x\,dx = \sin^3 x + C$. (Obs! En annan variant av detta är att $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \sin^3 x + C$. Härled själv hur $\int \cos^3 x\,dx$ lättast beräknas!)

(b) $\int \underbrace{(1+x^2)}_{f}\underbrace{\ln x}_{g}\,dx \overset{P.I.}{=} \left\{\begin{array}{ll} g = \ln x & f = (1+x^2)dx \\ g' = \frac{1}{x}\,dx & F = x + \frac{x^3}{3} \end{array}\right\} =$

$= Fg - \int Fg = (x + \frac{x^3}{3})\ln x - \int (x + \frac{x^3}{3})\frac{1}{x}\,dx =$

$= (x + \frac{x^3}{3})\ln x - \int 1\,dx - \int \frac{1}{3}\,x^2 dx = (x + \frac{x^3}{3})\ln x - x - \frac{x^3}{9} + C$ $\square$

Variabelbyte (också kallat substitution)

Detta är ”kedjeregeln baklänges”:

Kedjeregeln säger ju att om g är deriverbar i x och f är deriverbar i $g(x)$ och $u(x) = f(g(x))$ så är $u'(x) = f'(g(x))g'(x)$ där $f'(g(x))$ kallas *yttre derivata* och $g'(x)$ *inre derivata*.

Motsvarigheten för primitiva funktioner kallas *substitution* och innebär att om $u(x) = f(g(x))g'(x)$ och F är primitiv funktion till f så är $U(x) = \int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$. Eller uttryckt med den notation vi kommer använda:
$(*) \quad U = F(g(x)) \Rightarrow dU = F'(g(x))g'(x)\,dx.$

Exempel Integrera $\dfrac{1}{1+\sqrt{2x}}$.

Lösning

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{dx}{1+\sqrt{2x}} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ t = \sqrt{2x} \quad dt = \frac{2}{2\sqrt{2x}}dx = \frac{1}{\sqrt{2x}}dx \quad dx = t\,dt \\ \text{(med beteckningarna från } (*) \text{ är } U = t,\ F = \sqrt{x},\ g = 2x \text{ och } dU = dt,\ F' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ g' = 2) \end{array} \right\} \\
&= \int \tfrac{t\,dt}{1+t} \\
&= \int (1 - \tfrac{1}{1+t})\,dt \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \text{Ny substitution:} & \text{(beteckningarna från } (*)\text{: } U = s, \\ s = 1+t \quad ds = dt & F = 1+t,\ g = t,\ F' = 1,\ g' = 1) \end{array} \right\} \\
&= t - \int \tfrac{ds}{s} \\
&= t - \ln|s| \\
&= t - \ln|1+t| \\
&= \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x})
\end{aligned}$$

□

Ibland kan man skriva om ett uttryck lite med hjälp av substitution för att sedan kunna tillämpa en standardregel.

Exempel Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4x^2}$.

Lösning

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{dx}{5+4x^2} &= \int \tfrac{dx}{5(1+\frac{4}{5}x^2)} \\
&= \int \tfrac{dx}{5(1+(\frac{2}{\sqrt{5}}x)^2)} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ t = \frac{2}{\sqrt{5}}x \quad dt = \frac{2}{\sqrt{5}}dx \quad dx = \frac{\sqrt{5}}{2}dt \end{array} \right\} \\
&= \int \tfrac{\sqrt{5}/2}{5(1+t^2)}\,dt \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \int \tfrac{dt}{1+t^2} \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \arctan t + C \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \arctan(\tfrac{2}{\sqrt{5}}x) + C
\end{aligned}$$

□

De vanligaste substitutionerna är

- antingen rotuttryck
- eller "städning" av ett uttryck så att man får integranden på en av standardformerna. Observera dock att det man substituerar i de flesta fall måste vara antingen ett linjärt uttryck – så att derivatan bara blir en multiplikativ konstant som kan flyttas ur ingegreringen – eller sådant att man redan har den inre derivatan i integranden.

Exempel Integrera $\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}$.

Lösning

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ t = \sqrt{x} \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad dx = t\, dt \end{array} \right\} \\
&= \int te^t (t\, dt) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \text{P.I.:} & \\ g = t^2 & dF = e^t dt \\ g' = 2t\, dt & F = e^t \end{array} \right\} \\
&= t^2 e^t - \int 2t\, e^t\, dt \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \text{P.I.:} & \\ g = 2t & dF = e^t dt \\ g' = 2 & F = e^t \end{array} \right\} \\
&= t^2 e^t - 2(te^t - \int e^t dt) \\
&= e^t(t^2 - 2t + 2) + C \\
&= e^{\sqrt{x}}(x - 2\sqrt{x} + 2) + C
\end{aligned}$$

□

Partialbråksuppdelning (i korthet)

Ett rationellt uttryck (bråk där nämnare och täljare är polynom och där nämnaren kan faktoriseras) kan ibland skrivas som en summa av rationella uttryck. Speciellt är

$$\frac{1}{P(x)Q(x)} = \frac{A(x)}{P(x)} + \frac{B(x)}{Q(x)}$$

där A, B, P, Q polynom så att $\text{grad}\, \text{A} < \text{grad}\, \text{P}$ och $\text{grad}\, \text{B} < \text{grad}\, \text{Q}$. Till exempel gäller att $\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$ där man, med metoder välkända från moment 1: algebra, får att $A = \frac{a}{ad-bc}$ och $B = \frac{c}{bc-ad}$.

Man bör dock se upp: vissa rationella uttryck kan svåra att integrera via partialbråksuppdelning men istället ha mycket enklare lösning enligt de tidigare metoderna. . .

Exempel Integrera $P(x)/Q(x)$ om $Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ och
(a) $P(x) = 1 - 3x - 2x^2$ (b) $P(x) = 1 + x$ (c) $1 - 2x + 3x^2$.

Lösning

(a)
$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1-3x-2x^2}{1-x+x^2-x^3}\,dx &= \int \tfrac{1-3x-2x^2}{(1-x)(1+x^2)}\,dx \\
&= \int (\tfrac{A}{1-x} + \tfrac{Bx+C}{1+x^2})\,dx \\
&= \left[\begin{array}{l} A(1+x^2)+(Bx+C)(1-x) = 1-3x-2x^2 \\ \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ B-C &=& -3 \\ A-B &=& -2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ A+B &=& -2 \\ A-B &=& -2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ A+B &=& -2 \\ 2B &=& 0 \end{array}\right. \\ \Rightarrow A=-2,\ B=0,\ C=3 \end{array}\right] \\
&= \int \tfrac{2}{x-1}\,dx + \int \tfrac{3}{1+x^2}\,dx \\
&= 2\ln|x-1| + 3\arctan x + C
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1+x}{1-x+x^2-x^3}\,dx &= \int \tfrac{1+x}{(1-x)(1+x^2)}\,dx \\
&= \int (\tfrac{A}{1-x} + \tfrac{Bx+C}{1+x^2})\,dx \\
&= \left[\begin{array}{l} A(1+x^2)+(Bx+C)(1-x) = 1+x \\ \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ B-C &=& 1 \\ A-B &=& 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ A+B &=& 2 \\ A-B &=& 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ A+B &=& 2 \\ 2B &=& 2 \end{array}\right. \\ \Rightarrow A=1,\ B=1,\ C=0 \end{array}\right] \\
&= \underbrace{\int \tfrac{2}{x-1}\,dx}_{I} + \underbrace{\int \tfrac{x}{1+x^2}\,dx}_{II} \\
& \quad I = -\ln|1-x| \text{ och } II = \left\{\begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ t=1+x^2 \quad dt = 2x\,dx \quad x\,dx = \tfrac{1}{2}\,dt \end{array}\right\} = \\
& \quad = \int \tfrac{1}{t}\,(\tfrac{1}{2}\,dt) = \tfrac{1}{2}\ln|t| = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \\
&= -\ln|1-x| + \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\
&= \ln\tfrac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|} + C
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1-2x+3x^2}{1-x+x^2-x^3}\,dx &= \int \tfrac{1-2x+3x^2}{(1-x)(1+x^2)}\,dx \\
&= \int (\tfrac{A}{1-x} + \tfrac{Bx+C}{1+x^2})\,dx \\
&= \left[\begin{array}{l} A(1+x^2)+(Bx+C)(1-x) = 1-2x+3x^2 \\ \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ B-C &=& -2 \\ A-B &=& 3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ A+B &=& -1 \\ A-B &=& 3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A+C &=& 1 \\ A+B &=& -1 \\ 2A &=& 2 \end{array}\right. \\ \Rightarrow A=1,\ B=-2,\ C=0 \end{array}\right] \\
&= \int \tfrac{dx}{1-x} - \int \tfrac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&= \left\{\begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ t=1+x^2 \quad dt = 2x\,dx \end{array}\right\} \\
&= \int \tfrac{dx}{1-x} - \int \tfrac{dt}{t} \\
&= -\ln|1-x| - \ln|t| \\
&= -\ln|1-x| - \ln(1+x^2) \\
&= \ln\left|\tfrac{1}{(1-x)(1+x^2)}\right|
\end{aligned}$$

Men integrandens täljare, $1-2x+3x^2 = -D(1-x+x^2-x^3)$ varmed vi redan från början kunde insett att $\int \frac{1-2x+3x^2}{1-x+x^2-x^3}\,dx = -\ln|1-x+x^2-x^3|$ genom att substituera med $t = 1-x+x^2-x^3$.

Ibland kan man även behöva kvadratkomplettera så repetera detta.

Beräkning av primitiv funktion genom ekvationslösning

Detta är ett specialfall av beräkning där man startar med en primitiv funktion, F, och efter ett antal manipulationer får tillbaka formen F bland andra uttryck. Då kan det hända att man kan lösa ut vad F måste vara som i en vanlig algebraisk ekvation: man får implicit fram vad F måste vara utan att någonsin utföra själva "integreringen"...!

Exempel Integrera $f(x) = e^{2x} \sin x$.

Lösning

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int e^{2x} \sin x \, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \text{P.I.:} & \\ g = \sin x & dH = e^{2x} dx \\ g' = \cos x \, dx & H = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin x - \int \tfrac{1}{2} e^{2x} \cos x \, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \text{P.I.:} & \\ g = \cos x & dH = e^{2x} dx \\ g' = -\sin x \, dx & H = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin x - \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{2} e^{2x} \cos x - \int \tfrac{1}{2} e^{2x} (-\sin x) \, dx \right) \\
&= \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin x - \tfrac{1}{4} e^{2x} \cos x - \tfrac{1}{4} F(x) + C
\end{aligned}
$$

där man fått tillbaka $F(x)$ sånär som på en konstant!
Därmed man kan lösa ut F:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{F(x) + \tfrac{1}{4} F(x)}_{(1+\frac{1}{4})F(x)} &= \tfrac{1}{2} e^{2x} \sin x - \tfrac{1}{4} e^{2x} \cos x + C \\
\Rightarrow \quad F(x) &= \tfrac{4}{5} \left(\tfrac{1}{2} e^{2x} \sin x - \tfrac{1}{4} e^{2x} \cos x \right) + C \\
&= \tfrac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C
\end{aligned}
$$

Observera att det inte går lika bra om man i andra partialintegreringen istället väljer $g = e^{2x}$ och $dH = \cos x$. Då får man visserligen F i högerledet men summan av kardemumman blir att $F = F$ vilket kanske inte är så revolutionerande.

Att det är viktigt att ta hänsyn till den additiva konstanten C belyses av att partialintegrera $\frac{1}{x \ln x}$ genom att integrera $f = \frac{1}{x}$ och derivera $g = \frac{1}{\ln x}$. Gör denna övning!□

Läs kursivt s. 268 − 274 (avsnitt 5.3) och inte alls s. 275 − 279 (avsnitt 5.4).