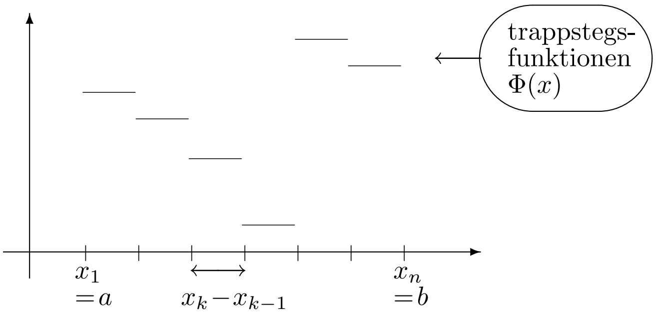
Högskolan i Halmstad

Kapitel 6: Integraler

Trappstegsfunktioner



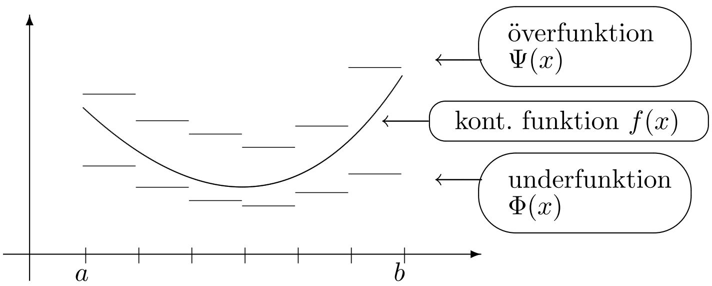
□

Definition **Integralen** av en trappstegsfunktion Φ är det reella talet $I(\Phi) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_k}_{\text{höjd}} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\text{bredd}}$. Integralen betecknas: $I(\Phi) = \int_a^b \Phi(x)\,dx$.
(Denna integral kallas *Riemann-summa.*)

Sats 1 Räkneregler
1. $I(\alpha\Phi) = \alpha I(\Phi)$
2. $I(\Phi + \Psi) = I(\Phi) + I(\Psi)$
3. $\Phi \leq \Psi \;\forall\, x \;\Rightarrow\; I(\Phi) \leq I(\Psi)$
4. $I(\Phi) = \int_a^b \Phi = \int_a^c \Phi + \int_c^b \Phi$

Nummer 1 och 2 anger att I är en linjär operator, nummer 3 att den bevarar ordningen, nummer 4 att man kan "mellanlanda" på ett x-värde c.

Definition Antag att f är en kontinuerlig funktion. Φ kallas **överfunktion** till f på (a, b) om $\Phi(x) \geq f(x)$ för alla $x \in (a, b)$. På samma sätt kallas Ψ **underfunktion** till f på (a, b) om $\Psi(x) \leq f(x)$ för alla $x \in (a, b)$.



Sats 2
<u>Om</u> f integrerbar på (a, b)
<u>så</u> finns ett entydigt bestämt tal λ sådant att $I(\Phi) \leq \lambda \leq I(\Psi)$ för alla överfunktioner Φ och underfunktioner Ψ till f.

Detta tal, $\lambda =: \int f$, kallas *Riemann-integralen* av f.

Exempel Visa att $\dfrac{5}{2} \le \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \le 5\,.$

Lösning

1. Hur ser f ut på $(0,2)$?

x	$f(x)$	
0	1	
1/2	$\sqrt{17}/4$	≈ 1.05
1	$\sqrt{2}$	≈ 1.42
3/2	$\sqrt{97}/4$	≈ 2.48
2	$\sqrt{17}$	≈ 4.2

varmed $1 \le f(x) \le \sqrt{17} = \sqrt{68/4} < \sqrt{81/4} = 9/2$.

2. Bilda underfunktion Φ och överfunktion Ψ.
Simplaste varianten, ett enda intervall $(0,2)$:
$\Phi(x) = 1$ och $\Psi(x) = 9/2$ för alla $x \in (0,2)$.

3. Beräkna integralerna
$$\underbrace{\int_0^2 \Phi(x)\,dx}_{1\cdot(2-0)=2} \;\le\; \underbrace{\int_0^2 f(x)\,dx}_{\int_0^2\sqrt{1+x^4}\,dx} \;\le\; \underbrace{\int_0^2 \Psi(x)\,dx}_{\frac{9}{2}(2-0)=9}$$

Men en finare intervallindelning hade kunnat ge oss en snävare olikhet:

2′. Låt
$$\Phi(x) \;=\; \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 1.4 & 1 < x \le \frac{3}{2} \\ 2.25 & \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases} \qquad \Psi(x) \;=\; \begin{cases} 1.25 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1.43 & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 2.5 & 1 < x \le \frac{3}{2} \\ 4.5 & \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases}$$

3′. Då får vi $\int_0^2 \Phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^4 c_k(x_k - x_{k-1}) =$
$= 1\cdot(\frac{1}{2}-0) + 1\cdot(1-\frac{1}{2}) + 1.4(\frac{3}{2}-1) + 2.25(2-\frac{3}{2}) = 2.825$
och $\int_0^2 \Psi(x)\,dx = 1.25\cdot(\frac{1}{2}-0) + 1.43\cdot(1-\frac{1}{2}) + 2.5(\frac{3}{2}-1) + 4.5(2-\frac{3}{2}) = 4.84$
Alltså: $\frac{5}{2} \;<\; 2.825 \;\le\; \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \;\le\; 4.84 \;<\; 5.$ $\square$

Sats 3
Alla kontinuerliga funktioner är integrerbara.

Läs beviset!

Exempel *Integrering av funktioner under x-axeln*

Beräkna $\int_0^4 \Phi(x)\,dx$ då $\Phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ -2 & 1 < x \le 2 \\ -3 & 2 < x \le 4 \end{cases}$

Lösning

$\int_0^4 \Phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{3} c_k(x_k - x_{k-1}) = 1 \cdot (1-0) + (-2)(2-1) + (-3)(4-2) = -7$ $\square$

På samma sätt bidrar kontinuerliga funktioner ovanför x-axeln positivt och nedanför på samma sätt fast negativt. T.ex. är $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$ eftersom den är lika mycket ovanför som under x-axeln.

Observera att om man integrerar baklänges får man samma resultat som framlänges fast med omvänt tecken!
Typiskt gäller: (f kont. på $[a,b]$) $\Rightarrow$ $(\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx)$.

Sats 7 *Integralkalkylens medelvärdessats (IMVS)*
Om f kontinuerlig på $[a,b]$
så finns $\xi \in [a,b]$ sådant att $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

Exempel Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\,dx$.

Lösning

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\,dx &\overset{\{IMVS\}}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{\xi}}\,((n+1)-n) \quad \text{för något } \xi \in [n, n+1] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{\xi}} \\
&= \lim_{\xi\to\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{\xi}} \quad \text{eftersom } \xi \in [n, n+1] \\
&= \sqrt{1+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$ $\square$

Nu kommer vi till ett riktigt stort och viktigt resultat. Inte bara är det en fin och pampig sats utan även ett resultat som i högsta grad kommer förenkla våra fortsatta beräkningar av integraler.

Sats 9 *Analysens huvudsats*
Om f kontinuerlig på $[a,b]$
så är $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ en primitiv funktion till f (dvs $S' = f$).

Detta innebär nämligen att vi kan använda våra kunskaper att *integrera* för att exakt beräkna Riemann-integraler av *kontinuerliga* funktioner!

Bevis: Låt $S(x)$ vara definierad av $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ för alla $x \in [a,b]$. Då är

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt \;-\; \int_a^{x} f(t)\,dt\right) && \text{definitionen av } S \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_x^{a} f(t)\,dt \;+\; \int_a^{x+h} f(t)\,dt\right) && \text{integretion baklänges så teckenbyte} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt && \text{mellanlandningen på } a \text{ slopas} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot f(\xi)((x+h)-x) && \text{IMVS} \\
&= \lim_{h\to 0} f(\xi) \\
&= f(x) && \text{eftersom } f \text{ kont. på } [a,b]
\end{aligned}
$$

□

Exempel Beräkna derivatan $f'(t)$ av funktionen $f(t) = \int_0^{\sin t} \sqrt{1-u^2}\,du$.

Lösning Låt $S(x) = \int_0^x \sqrt{1-u^2}\,du$. Då är $f(t) = S(x)$ med $x = x(t) = \sin t$, dvs $f(t) = S(\sin t)$. Enligt IMVS är då $S'(x) = \sqrt{1-x^2}$ och

$f'(t) = (S(\sin t))' = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}\cdot\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t = \cos^2 t$. □

Sats 10

Om f kontinuerlig på $[a,b]$
F primitiv funktion till f

så är $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \Big[F(x)\Big]_a^b \;=\; F(b)-F(a)$

Exempel Beräkna $\int_0^2 xe^x dx$.

Lösning $\int_0^2 xe^x dx \overset{P.I}{=} \left\{\begin{array}{ll} f = e^x & g = x \\ \int fg = Fg - \int Fg' & \end{array}\right\} = \Big[e^x x\Big]_0^2 - \int_0^2 e^x\cdot 1\,dx =$

$= (1^2\cdot 2 - e^0\cdot 0) - \Big[e^x\Big]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1$. □

Exempel Beräkna $\int_0^{e-1} \frac{1-x}{1+x}\,dx$.

Lösning $\int_0^{e-1} \frac{1-x}{1+x}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} \text{Substitution:} & \\ u = 1+x & x = 1-1 \leftrightarrow u = e \\ du = dx & x = 0 \leftrightarrow u = 1 \end{array}\right\} = \int_1^e \frac{2-u}{u}\,du =$

$= \int_1^e \frac{2}{u}\,du - \int_1^e \frac{u}{u}\,du = [2\ln u]_1^e - [u]_1^e = (2\ln e - 2\ln 1) - (e-1) = 3 - e$. □

Generaliserade integraler

Definition $\int_a^b f$ kallas **generaliserad integral** om f är kontinuerlig på antingen $(a,b]$, $[a,b)$ eller (a,b) och diskontinuerlig i respektive a eller b eller (a och b).

Detta innebär att man kan ha två typer av generaliserade integraler: *oändligt intervall* och *obegränsad integrand.*

I fallet med oändligt intervall är

- antingen f kont. på $(a,b]$ och $a=-\infty$ varmed $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim\limits_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx$
- eller f kont. på $[a,b)$ och $b=\infty$ varmed $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$
- eller f kont. på (a,b), $a=-\infty$ och $b=\infty$ varmed $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim\limits_{R\to-\infty}\Big(\lim\limits_{S\to\infty}\int_R^S f(x)\,dx\Big)$.

Exempel Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^{-x}+e^{2x+1}}$.

Lösning:
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^{-x}+e^{2x+1}} &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{1+e(e^x)^3}\,dx \\
&= \left\{\begin{array}{lll} \text{Substitution:} & & \\ u=e^x & (x\to\infty)\leftrightarrow(u\to\infty) \\ du=e^x dx & (x\to-\infty)\leftrightarrow(u\to 0)\end{array}\right\} \\
&= \int_0^\infty \frac{du}{1+eu^3} \\
&= \left\{\begin{array}{ll} \text{Substitution:} & \\ t=\sqrt[3]{e}\,u & (u\to\infty)\leftrightarrow(t\to\infty) \\ du=\sqrt[3]{e}\,du & (u\to 0)\leftrightarrow(t\to 0)\end{array}\right\} \\
&= e^{-1/3}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3}
\end{aligned}$$

Låt oss beräkna primitiv funktion till $\frac{1}{1+t^3}$ separat:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} &= \int\left(\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}\right)dt \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{Partialbråksuppdelning: } A(t^2-t+1)+(Bt+C)(1+t)=1 \\
\left\{\begin{array}{rcl} A+B &=& 0 \\ -A+B+C &=& 0 \\ A+C &=& 1\end{array}\right. \quad
\left\{\begin{array}{rcl} -A+B+C &=& 0 \\ A+B &=& 0 \\ 2A-B &=& 1\end{array}\right. \quad
\left\{\begin{array}{rcl} -A+B+C &=& 0 \\ A+B &=& 0 \\ 3A &=& 1\end{array}\right. \\
\Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{3}\Big(\underbrace{\int\frac{dt}{1+t}}_{I}+\underbrace{\int\frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt}_{II}\Big) \\
&\quad \left[\begin{array}{l} I=\ln|1+t| \quad II=-\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt}_{III}+\frac{3}{2}\underbrace{\int\frac{dt}{t^2-t+1}}_{IV} \\
III=\ln|t^2-t+1| \quad IV=\int\frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{dt}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2}))^2+1}= \\
=\{\text{Subst: } s=\frac{1}{\sqrt{3}}(2t-1)\ \ dx=\frac{2}{\sqrt{3}}dt\}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{ds}{1+s^2}= \\
=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan s=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t-1))\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{3}(I+II) \\
&= \frac{1}{3}(\ln|1+t|+(-\frac{1}{2})III+\frac{3}{2}IV) \\
&= \frac{1}{3}\Big(\ln\frac{|1+t|}{\sqrt{|t^2-t+1|}}+\sqrt{3}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t-1))\Big) \ =:\ F(t)
\end{aligned}$$

varmed slutligen

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x}+e^{2x+1}} &= \tfrac{1}{3}e^{-1/3}\Big(\lim_{t\to\infty} F(t) - \lim_{t\to 0} F(t)\Big) \\
&= \Big(\frac{e^{-1/3}}{3}\cdot \ln 1 + \frac{e^{-1/3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}\Big) - \Big(\frac{e^{-1/3}}{3}\cdot \ln 1 + \sqrt{3}\,e^{-1/3}\arctan(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\Big) \\
&= \frac{\pi e^{-1/3}}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}\,e^{-1/3}(-\tfrac{\pi}{3}) \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{2e^{1/3}}
\end{aligned}
$$

$\square$

I fallet med obegränsad integrand är

- antingen f kont. på $(a,b]$ och obegränsad i $x=a$ varmed $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$
- eller f kont. på $[a,b)$ och obegränsad i $x=b$ varmed $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$
- eller f kont. på (a,b) och obegränsad i både $x=a$ och $x=b$ varmed $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon\searrow 0}\Big(\lim_{\eta\searrow 0}\int_{a+\epsilon}^{b-\eta} f(x)\,dx\Big)$.

Exempel Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Lösning:

Eftersom $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ är kontinuerlig i $x=0$ (endast obegränsad i $x=1$) så är

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\
&= \left\{\begin{array}{ll} \text{Substitution:} & \\ u=\sqrt{1-x} & x=0 \leftrightarrow u=1 \\ du = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,dx & (x\to 1-\epsilon)\leftrightarrow(u\to\sqrt{\epsilon}) \\ dx = -2u\,du & \end{array}\right\} \\
&= \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_1^{\sqrt{\epsilon}} \frac{-2u}{u}\,du \\
&= 2\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 du \\
&= 2\lim_{\epsilon\searrow 0}(1-\sqrt{\epsilon}) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$\square$