© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 4: Tillämpning av derivata

Extrempunkter och extremvärden

Variant av Sats 16 (s. 206)
Antag att f är deriverbar på $[a,b]$. Då gäller för alla $x \in (a,b)$
(i) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ (svagt) växande
(ii) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strängt växande
(iii) $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ (svagt) avtagande
(iv) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strängt avtagande

Bevis:

$\Rightarrow$ Antag att $x_1 < x_2$ är godtyckliga punkter på intervallet (a,b). Då gäller enligt medelvärdessatsen att $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$ för något $\xi \in (x_1, x_2)$. $f' \geq 0$ och $x_1 < x_2$ innebär att $f(x_1) \leq f(x_2)$. Eftersom x_1, x_2 var godtyckliga på (a,b) är därmed f växande på hela (a,b).

$\Leftarrow$ Antag att x_0 är godtycklig på intervallet (a,b). f växande på $(a,b) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ för varje $x \in (a, x_0) \Rightarrow \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
På samma sätt, eftersom f är växande är $f(x) \geq f(x_0)$ för varje $x \in (x_0, b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
Eftersom x_0 godtyckligt på (a,b) gäller $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in (a,b)$.

Bevisen för $(ii), (iii), (iv)$ är helt analoga. □

Att implikationen bara gäller åt höger i (ii) och (iv) illustreras av $f(x) = x^3$ som är strängt växande på hela $\mathbb{R}$ men $f'(0) = 0$.

Exempel Beräkna alla extrempunkter till $f(x) = 2^x/(1+3^x)$ samt bestäm om de är max- eller min-punkter. Rita funktionskurvan.

Lösning

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{D(2^x)(1+3^x) - 2^x D(1+3^x)}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{D(e^{x\ln 2})(1+3^x) - 2^x D(1+e^{x\ln 3})}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{e^{x\ln 2}\ln 2(1+3^x) - 2^x e^{x\ln 3}\ln 3}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{2^x \ln 2 + 6^x \ln 2 - 6^x \ln 3}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{2^x \ln 2 + 6^x \ln(\frac{2}{3}}{(1+3^x)^2}
\end{aligned}$$

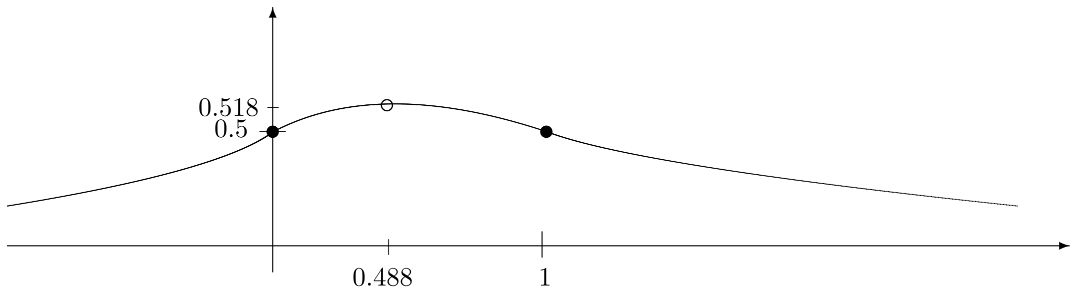
För att $f'(x) = 0$ måste täljaren $2^x \ln 2 + e^x \ln \frac{2}{3} = 0$,
dvs $2^x \ln 2 = 6^x \ln \frac{3}{2}$, dvs $\frac{\ln 2}{\ln(3/2)} = (\frac{6}{2})^x = 3^x$, dvs $x = \ln\left(\frac{\ln 2}{\ln(3/2)}\right)\Big/ \ln 3 = 0.4880771$.

Att detta är den enda möjliga extrempunkten ges av att $x = 0.4880771$ är den enda lösningen till $f'(x) = 0$. Att det verkligen är en lokal extrempunkt kontrolleras:

x	0	1
$f'(x)$	$\frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$	$\frac{1}{16}\ln(4(\frac{2}{3})^6)$
	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Ok, det är tydligen en lokal maxpunkt. Eftersom $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{0}{1+0} = 0$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{(\frac{1}{2})^x + (\frac{3}{2})^x} =$ "$\frac{1}{0+\infty}$" $= 0$ så är <u>maxpunkten $x = 0.4880771$ den enda extrempunkten</u>.

För att rita funktionskurvan kan vi konstatera att $2^x > 0$ och $3^x > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så $0 < f(x) = \frac{2^x}{1+3^x} < \frac{2^x}{3^x} = (\frac{2}{3})^x \searrow 0$ då $x \nearrow \infty$ och $0 < f(x) = \frac{2^x}{1+3^x} < 2^x \searrow 0$ då $x \searrow -\infty$.



$\square$

Obs! $f'(x) = 0 \not\Rightarrow x$ lokalt max eller lokal min.
(Det kan vara en terasspunkt eller en odefinierbar extrempunkt $-$ se s. 220, avsn. 4.2 om oscillerande uppförande nära x_0)

Detta avgörs med teckentabell eller inspektion av f''.

Variant av Sats 2 (s. 221)
<u>Om</u> $\epsilon > 0$, $f'(x_0) = 0$ och f'' kont. på ϵ-intervallet $(x_0 - \epsilon\,,\ x_0 + \epsilon)$
<u>så</u> $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ strängt lokalt min för f
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ strängt lokalt max för f

Bevis: Detta är en följd av Sats 16, s. 206, avsnitt 3.5.

Antag $f''(x_0) > 0$. f'' kontinuerlig på $(x_0-\epsilon\,,\ x_0+\epsilon) \Rightarrow f'' > 0$ på $(x_0-\epsilon'\,,\ x_0+\epsilon')$ för något $\epsilon' > 0 \Rightarrow f'$ är strängt växande genom x_0 (enl. Sats 16). Eftersom $f'(x_0) = 0$ växlar därför f' tecken från minus till plus. Åter enl. Sats 16 innebär detta att f är strängt avtagande för $x \in (x_0 - \epsilon'\,,\ x_0)$ och strängt växande för $x \in (x_0 - \epsilon'\,,\ x_0)$. Eftersom f är deriverbar och därmed kontinuerlig har f ett lokalt minimum i x_0.

Beviset av att $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ strängt lokalt max för f är helt analogt. $\square$

Optimering

Exempel Med ett givet rep vill man avgränsa dels en cirkel och dels en kvadrat, så att figurernas totala area blir minimal. I vilka proportioner ska repet delas?

Lösning Antag att repets längd är ℓ (vi kan i själva verket utan inskränkning anta att $\ell = 1$ men vi kommer till det) och att man delar i proportionen $p : 1 - p$, dvs man använder $p\ell$ av repet till cirkeln och $(1-p)\ell$ till kvadraten, där $0 \le p \le 1$.

Då blir cirkelns area:
$A_C = \pi r^2$ där $p\ell = 2\pi r \;\Rightarrow\; r = \frac{p\ell}{2\pi} \;\Rightarrow\; A_C(p) = \frac{p^2\ell^2}{4\pi}$
och kvadratens:
$A_K = s^2$ där $(1-p)\ell = 4s \;\Rightarrow\; A_K(p) = \frac{1}{16}(1 - 2p + p^2)\ell^2$.

Nu inser man att vi utan inskränking kan anta att $\ell = 1$ ty den totala arean är $A_T(p) = A_C + A_K = \ell^2(\frac{p^2}{4\pi} + \frac{1}{16}(1 - 2p + p^2))$.
Den totala arean har ett eventuellt lokalt minimum där $A_T'(p) = 0$, dvs där
$0 = \frac{p}{2\pi} + \frac{1}{16}(-2 + 2p) = \frac{p}{2\pi} + \frac{1}{8}(p-1) = (\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8})p - \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}} = \frac{\pi}{4+\pi}$

Nu gäller det att inte glömma kontrollera vilken typ av extrempunkt detta är: $A_T''(p) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0 \;\Rightarrow\; p = \frac{\pi}{4+\pi}$ är ett minimum!

Alltså: dela repet så att $\frac{\pi}{4+\pi}\ell$ ges till cirkeln och $\frac{4}{4+\pi}\ell$ ges till kvadraten! $\square$

Olikheter

Exempel Visa att $e^{\sin x} \ge (2 + \sin x)/e$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

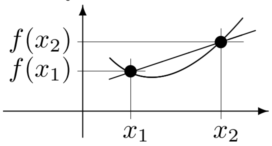
Lösning Låt $y = 1 + \sin x$ så räcker det att visa att $f = e^y - (1 + y) \ge 0$. Vi har att $f' = e^y - 1$ och eftersom $y = 0$ är entydig lösning till $f' = 0$ och

y	< 0	$= 0$	> 0
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

så är $y = 0$ globalt min för f där $f(0) = 1 - (1 - 0) = 0$. Därmed är $f(y) \ge 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$ och speciellt med $y = 1 + \sin x$ är $e^{1+\sin x} - (2 + \sin x) \ge 0$. $\square$

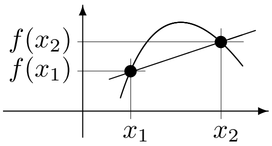
Konvexitet och konkavitet

Om f har utseendet av en *glad* mun (konvex) på intervallet (x_1, x_2):



så innebär detta att f:s värden, $f(x)$, är mindre än motsvarande värde $\left(x\,,\ \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}x + \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}\right)$ på linjen genom punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ för alla $x \in (x_1, x_2)$.

På samma sätt innebär en *ledsen* mun (konkav) på (x_1, x_2):



att ett värde, $f(x)$, är större än motsvarande värde $\left(x\,,\ \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}x+\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{x_1-x_2}\right)$ på linjen genom punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ för alla $x \in (x_1, x_2)$.

Definition Antag att $f : D_f \to D_f, V_f \subseteq \mathbb{R}$ kont. Då kallas f **konvex** om $f(px_1 + (1-p)x_2) \leq pf(x_1) + (1-p)f(x_2)$ för alla $x_1 \neq x_2 \in D_f$ och $p \in (0,1)$.
Om sträng olikhet gäller så kallas f **strängt konvex**. Om istället $f(px_1 + (1-p)x_2) \geq pf(x_1) + (1-p)f(x_2)$ för alla $x_1 \neq x_2 \in D_f$ och $p \in (0,1)$ så kallas f **konkav**. Om sträng olikhet gäller så kallas f **strängt konkav**.

Sats 5 (s. 243−244)
f' strängt växande $\Leftrightarrow$ f strängt konvex

Variant på Sats 5 är: f' strängt avtagande $\Leftrightarrow$ f strängt konkav

Följdsats 1 (s. 244)
Om $f'' > 0$
$f = 0$ i högst ändligt många punkter
så f strängt konvex

Detta följer direkt av Sats 16 och Sats 5.

Kom i håg: f'' pos. $\Rightarrow$ f glad. f'' neg. $\Rightarrow$ f ledsen.

Exempel
Visa att $\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta$ för alla $x, y \in \mathbb{R}^+$ och $\alpha, \beta > 0$ sådana att $\alpha + \beta = 1$.

Lösning Vi ska visa att $\alpha x + (1-\alpha)y \geq x^\alpha y^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.
Logaritmera båda led: $\ln(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y$.
Betrakta nu funktionen $f = \ln x$. Eftersom $f'' = -1/x^2 < 0$ för alla $x \neq 0$ så är enl. Sats 5 och följdsats 1 f konkav på $(0, \infty)$, och enligt definitionen av konkavitet är därmed
$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ för alla $x \neq y \in \mathbb{R}^+$.
Om $x = y$ så är påståendet $(\alpha+\beta)x \geq x^{\alpha+\beta}$ för α, β sådana att $\alpha + \beta = 1$.
Men insättning av $\alpha + \beta = 1$ ger att påståendet är $1 \cdot x \geq x^1$ vilket naturligtvis är sant för alla reella x. $\square$

Numerisk ekvationslösning

Sats 3 (s. 232)
<u>Om</u> F deriverbar på (a,b)
$F : A \to B$ där $A, B \subseteq (a,b)$
$\exists\, \alpha \in (a,b) : \alpha = F(\alpha)$
$\exists\, c < 1 : (x \in (a,b) \;\Rightarrow\; |F'(x)| \leq c)$
<u>så</u> α entydig rot till ekvationen $x = F(x)$ på (a,b)
$(x_0 \in (a,b)) \wedge (x_{n+1} = F(x_n), n \geq 0) \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

(Läs beviset!)

Exempel Finn approximatvt den reella rot till ekvationen $20x - 10x^2 - 10x^5 - 10x^6 = 0.1$ som ligger närmast origo.

Lösning Denna ekvation har ej någon analytisk lösning (se anteckningar från föreläsning 1). Emellertid kan vi med hjälp av att noggrannt rita funktionskurvan (som gåtts igenom i tidigare avsnitt) visa att det finns exakt 1 reell rot på intervallet $(0.05, 0.5)$ och dessutom approximativt ange vilken den är!

Plot av uttrycket i ekvationens vänsterled indikerar att ekvationen har den rot som ligger närmast origo på intervallet $(0.05, 0.5)$. Låt oss skriva ekvationen $F(x) = x^6 + x^5 + x^2 - x + 0.1 = x$. Ett av villkoren i Sats 3 är att derivatan av vänsterledet, F', ska vara absolutbegränsad av en konstant strikt mindre än 1. (Observera att detta ej är ekvivalent med att $|F'(x)| < 1$ som man först kanske skulle kunna tro!) I detta fall finner vi efter lite undersökning att $|F'(x)| < 0.9$ på $(0.05, 0.5)$.

På intervallet $(0,1)$ får vi med med algoritmen $x_{n+1} = F(x_n), n = 0,1,2,3,4,5$ och startvärdet $x_0 = 0.2$ följande resultat:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0.2	-0.0596	0.1632	-0.0364	0.1377	-0.0187	0.1191

Konvergensen är som synes ganska långsam men fortsätter på detta vis i 200 steg kommer man fram till $x_{200} = 0.0513169$ som är en god approximation. Fördelen med denna algoritm är att den kan implementeras mycket enkelt för beräkning av en dator. (Det ovanstående resultatet fick jag fram med koden

```
x <- start
y <- start - 1
step <- 0
while(abs(x - y) > crit)
   step <- step + 1
   y <- x
   x <- y^6 + y^5 + y^2 - y + 0.1
end while
return x, step
```

som exempel.) □

Newton-Raphsons metod

För att lösa ekvationen $f(x) = 0$ kan man använda algoritmen $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ med lämpligt startvärde, x_0. Nödvändiga villkor för konvergens av denna metod är att $f'(x) \neq 0$ och att $f''(x)$ är begränsad nära roten.

Exempel Finn approximatvt den reella rot till ekvationen $20x - 10x^2 - 10x^5 - 10x^6 = 0.1$ som ligger närmast origo.

Lösning Med $f(x) = 20x - 10x^2 - 10x^5 - 10x^6 - 0.1$ har vi att $f'(x) = 20 - 50x^4 - 60x^5$. Efter kontroll av för vilka x som $f'(x) > 0$ (ungefär $(-\infty, 0.5)$) ger Newton-Raphsons metod att

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0.2	0.0367	0.0512	0.05131689	0.0513169	0.0513169	0.0513169

efter bara 6 steg med algoritmen! Newton-Raphsons metod är en *fantastiskt* snabb metod för de fall då den konvergerar. För att övertyga sig om att detta är den rot som ligger närmast origo får man komplettera med att plotta f's graf för $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

För att bedöma hur många siffrors noggrannhet man får kan man resonera: om de $k + 1$ första siffrorna inte ändras från steg n till steg $n + 1$ så har man konvergerat mot roten med k siffrors noggrannhet. $\square$