Högskolan i Halmstad

Kapitel 9: Taylors formel

Läs sidorna 409 – 412 kursivt (avsnitt 9.1 och 9.2 till **Taylors formel**).

Taylorutveckling handlar om att approximera godtyckliga (deriverbara) funktioner med polynom som lättare kan hanteras och samtidigt kunna visa att skillnaden mellan approximationen och den ursprungliga funktionen kan fås godtyckligt liten!

Taylors formel

Om f är n gånger deriverbar

så $$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \quad \text{där } \xi \in (x,a).$$

Högerledet kallas **Taylorutvecklingen** av f kring a.

Om f är oändligt många gånger deriverbar på $(a-\epsilon\,,\ a+\epsilon)$, $\epsilon > 0$

så $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{för alla } x \in (a-\epsilon\,,\ a+\epsilon)$$

Taylorutveckling är ett bra exempel på hur vi kan tillämpa kunskaperna att derivera uttryck inom matematiken och det är det kraftfullaste verktyget vi kommer att lära oss för t ex beräkning av gränsvärden, extremvärdesundersökningar etc.

Själva användningen av Taylorutveckling sker genom att lära sig standardutvecklingar av vanligt förekommande uttryck utantill (Sats 2). Man bör ändå komma ihåg Taylors formel för att kunna göra ”kontroll-härledning” av Taylorutveckling av deluttryck för att se att man kommer ihåg rätt!

Exempel Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin^3 x)}{x^3}$.

Lösning Taylorutvecklingen av $\sin x$ kring $a = 0$ är

$$\sin x = \tfrac{\sin 0}{0!}x^0 + \tfrac{\cos 0}{1!}x^1 + \tfrac{-\sin 0}{2!}x^2 + \tfrac{-\cos 0}{3!}x^3 + \tfrac{\sin 0}{4!}x^4 + \tfrac{\cos \xi}{5!}x^5 \;=\; x - \frac{x^3}{6} + B(x^5)$$

där beteckningen $B(x^n)$ betyder ”ett polynom med potenser av grad n och högre”. Eftersom frågan gäller x nära noll har x^n mindre betydelse ju större n är. Speciellt då $x \to 0$ försvinner $B(x^n)$ fullständigt. Man måste dock ta med några av de termer som föregår denna restterm för att se vad som kan strykas ur uttrycket och storleken på det som blir kvar. Vi har därmed att

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= (x - \tfrac{x^3}{6} + B(x^5))^3\\ &= (x + (-\tfrac{x^3}{6} + B(x^5)))^3\\ &= x^3 + 3x^2(-\tfrac{x^3}{6} + B(x^5))) + 3x(-\tfrac{x^3}{6} + B(x^5))) + (-\tfrac{x^3}{6} + B(x^5)))^3\end{aligned}$$

där $3x^2(-\frac{x^3}{6} + B(x^5)) = -\frac{x^5}{2} + B(x^7)$, $3x(-\frac{x^3}{6} + B(x^5))^2$ inte har några potenser med grad lägre än 7 och $(-\frac{x^3}{6} + B(x^5))^2$ inte har några potenser med grad lägre än 9, varmed $\sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + B(x^7) = x^3 + B(x^5)$.

Därför får vi

$$\begin{aligned}\sin(\sin^3 x) &= \sin(x^3 + B(x^5)) \\ &= (x^3 + B(x^5)) - \tfrac{(x^3+B(x^5))^3}{6} + B((x^3 + B(x^5))^5) \\ &= x^3 + B(x^5)\end{aligned}$$

varmed $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin^3 x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - B(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-B(x^2)}{1} = 1$

På detta vis klarade vi att Taylorutveckla $\sin(\sin^3 x)$ genom att endast använda Taylors formel för $\sin x$. Man hade också kunnat använda Taylors formel direkt för täljaren $\sin(\sin^3 x)$ men räkningarna förenklas knappast av detta. Däremot finns ett sätt som bara utnyttjar standardgränsvärden och som är frapperande enkelt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin^3 x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(\sin^3 x)}{\sin^3 x} \cdot \frac{\sin^3 x}{x^3} \right)$$

Här har vi för den första faktorn att $\frac{\sin x}{x} \to 1$ och $(x \to 0) \Rightarrow (\sin^3 x \to 0)$ vilket implicerar att $\frac{\sin(\sin^3 x)}{\sin^3 x} \to 1$. Den andra faktorn är ju inget annat än $(\frac{\sin x}{x})^3$ så även denna har gränsvärdet 1. Och därmed följer att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin^3 x)}{x^3} = 1 \cdot 1 = 1$.

Även om denna lösning är att föredra kanske man inte alltid ser den framgångsrika uppdelningen i lämpliga faktorer och termer. Dessutom kan det vara så att man kanske inte *kan* bryta ned uttrycket i standardgränsvärden. För dessa situationer utgör Taylorutveckling en ovärderlig räddning! $\square$

Läs Sats 2, s. 413−414 (standardutvecklingarna (4), (5), . . . , (9)) om standardutvecklingar men vänta med beviset till efter integralavsnittet.

Läs s. 416−420 (slutet av avsnitt 9.3, avsnitt 9.4, 9.5 till *Svagare form av resttermen*, Exempel 5 och 6) kursivt.

Läs dock avsnitten **Svagare form av resttermen** s. 420 − 421, 424 (Exempel 4 och 7) och **Gränsvärde av resttermen när** $n \to \infty$ s. 425−426 (serieframställningarna (16), (17), . . . , (21)). Ett ibland mycket användbart redskap är **L'Hospitals regel** (s. 428 − 430, Exempel 11 och 12).

Exempel Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1-\frac{1}{1+x})}{1-\frac{x}{1+x}}$.

Lösning Vi har mha L'Hospitals regel att

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{1+x})}{1-\frac{x}{1+x}} &= \text{„}\tfrac{0}{0}\text{"} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \scriptstyle 1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x} \\ \scriptstyle 1-\frac{x}{1+x}=\frac{1}{1+x} \end{array} \right\} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x}\cdot(1+x)^{-2}}{-(1+x)^{-2}} \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Alternativt kan man med gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ resonera

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{1+x})}{1-\frac{x}{1+x}} &= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+\frac{1}{y})}{1+(-\frac{1}{y}-1)y} \qquad \{y=-\tfrac{1}{x+1}\} \\
&= \lim_{y\to 0} -\frac{1}{y}\ln(1+y) \\
&= -\lim_{y\to 0} \ln\Big(1+y\Big)^{\frac{1}{y}} \\
&= -\ln \lim_{w\to\infty}\Big(1+\frac{1}{w}\Big)^{w} \qquad \{w=\tfrac{1}{y}\} \text{ och } \ln(\cdot) \text{ kont. på } \mathbb{R}. \\
&= -\ln e \\
&= -1
\end{aligned}$$

$\square$

Se dock upp med att slentrianmässigt använda L'Hospitals regel! Även om den är enkel att komma ihåg och det finns många tillfällen då den är teoretiskt tillämpbar innebär inte detta att den alltid är att *föredra*. Den kan ge vederstyggligt massiva räkningar som därmed lätt blir fel. Testa att beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^3 x)}{x^3}$ m.h.a. L'Hospitals regel så får ni se vad jag menar...