Kapitel 7: Användningar av integraler

© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Areabestämning

Beräkning av en area som begränsas av funktionskurvor (säg f, g, h):

1. Rita graf
2. Beräkna skärningspunkter: (säg x_1, x_2, x_3)
3. Intervallbestämning (säg $[x_1, x_2] : f - g,\ [x_2, x_3] : f - h$)
4. Integralberäkning (Arean $= \int_{x_1}^{x_2}(f-g) + \int_{x_2}^{x_3}(f-h)$)

(Läs Exempel 2 s. 312−313.)

Rotationsvolymer

Då en kurva, $f(x)$, roteras runt x-axeln fås en yta. Den volym som begränsas av denna yta och ett intervall, $[a, b]$, på x-axeln kallas *rotationsvolym*.

För att beräkna en sådan volym går vi för ett ögonblick tillbaka till trappstegsfunktionerna som approximation av de allmänna kontinuerliga funktionerna. På samma sätt som vi approximativt beräknade integralen genom att definiera Riemannsumman kan vi approximera rotationsvolymen med en summa av volymer av ”roterade trappsteg”. I varje ”roterat trappsteg” är höjden radien i en cirkel varmed volymen av det ”roterade trappsteget” fås som arean av cirkeln, $\pi f(x)^2$, gånger vidden av delintervallet, $x_k - x_{k-1}$. Då man gör delintervallen fler och smalare förbättras approximationen och i gränsen fås oändligt smala roterade trappseg, dx, och summeringen blir integrering. Därmed är sambandet för beräkning av rotationsvolymer

$$\text{Rotationsvolymen} \ = \ \pi \int_a^b f(x)^2 dx\ .$$

Exempel Beräkna volymen av den kropp som fås mellan $x = 0$ och $x = 1$ genom att rotera $f(x) = (x+1)^{-1}$ kring x-axeln.

Lösning

$$\begin{aligned}
\text{Rotationsvolymen} &= \pi \int_0^1 f(x)^2 dx \\
&= \pi \int_0^1 \tfrac{1}{(1+x)^2}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \text{Substitution:} & \\ u = x+1 & x = 0 \leftrightarrow u = 1 \\ du = dx & x = 1 \leftrightarrow u = 2 \end{array} \right\} \\
&= \pi \int_1^2 \tfrac{du}{u^2} \\
&= \pi \left[-u^{-1}\right]_1^2 \\
&= \pi(-\tfrac{1}{2} - (-\tfrac{1}{1})) \\
&= \pi/2
\end{aligned}$$

Observera att rotationsvolymer ej kan vara negativa! □

Kurvlängd

I *moment 2: linjär algebra* hanterade vi linjer och plan och framställde dessa på affin form respektive parameterform. Då vi nu hanterar mer allmänna (ej endast linjära) funktioner, f, och avbildar dessa i det 2-dimensionella koordinatsystemet har vi använt funktionssambandet på formen $f(x) = \{\text{uttryck i termer av } x, \text{ ej av } f\}$ (som motsvarar den affina formen). Men i vissa sammanhang kan det vara lämpligare att arbeta med funktionens parameterform $\boldsymbol{r}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ där $\alpha(t)$ anger x-koordinaten och $\beta(t)$ y-koordinaten för varje värde på parametern t.

Om sambandet mellan funktion, graf, parameteruttryck kan sägas att varje deriverbar funktion definierar en funktionskurva. Däremot kan inte varje kurva beskrivas med *en* funktion (t ex sambandet $y^2 + x^2 = 1$ (enhetscirkeln) behöver 2 funktioner, och sambandet $x = 1,\ y \in \mathbb{R}$ (en linje parallell med y-axeln) kan inte alls beskrivas med funktioner). På samma sätt kan varje deriverbar funktion skrivas på parameterform men varje parameteruttryck $(\alpha(t), \beta(t))$ är inte säkert *en* funktion.

Övergång från $f(x) = \{\text{uttryck i termer av } x, \text{ ej av } f\}$ till parameterform är inte något problem: om $f(x)$ är en funktion så är $\boldsymbol{r}(t) = (t, f(t))$ en version av parameterformen. Övergång från ett parameteruttryck till en funktion på formen $f(x) = \{\text{uttryck i termer av } x, \text{ ej av } f\}$ kan vara besvärligare om ens möjlig.

Exempel

(a) Ange funktionen $f(x) = \ln(x + \ln x),\ x \in [1, \infty)$ på parameterform.

(b) Är parameteruttrycket $\boldsymbol{r}(t) = (1 + 4\cos^2 t, \sin t),\ t \in \mathbb{R}$ en funktion? Ange denna eller de funktioner på formen $f(x) = \{\text{uttryck i termer av } x, \text{ ej av } f\}$ som beskriver parameteruttrycket fullständingt.

Lösning

(a) $\boldsymbol{r}_1(t) = (t, \ln(t + \ln t)),\ t \in [1, \infty)$ är en acceptabel lösning.
Med t ex substitutionen $x = e^t$ fås att även $\boldsymbol{r}_2(t) = (e^t, \ln(t + e^t)),\ t \in [0, \infty)$ är en acceptabel parameterframställning.

(b) Låt $x = \sin t$. Då är $\boldsymbol{r}(x) = (1 + 4(1 - x^2), x) = (5 - 4x^2, x)$ dvs sambandet mellan x- och y-koordinat är $x = 3 - 2y^2$ dvs $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5 - x}$. Detta innebär att parameteruttrycket *ej* är en funktion.
Funktionerna $f_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5 - x},\ x \in (-\infty, 5]$ och $f_2(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{5 - x},\ x \in (-\infty, 5]$ motsvarar tillsammans $\boldsymbol{r}$.

[För en kurva som beskrivs av $\boldsymbol{r}$ är tangentriktningen i punkten $\boldsymbol{r(t)}$ derivatan $\boldsymbol{r}' = (\alpha'(t), \beta'(t))$.

Parameterframställningen kan användas för att beräkna funktionskurvors längd: längden av funktionskurvan $\boldsymbol{r}(t)$ på parameterintervallet (α, β) är $\int_\alpha^\beta |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt$.

Eftersom $\boldsymbol{r}(x) = (x, f(x))$ är en parameterframställning av funktionen f fås att

> längden av kurvan som f beskriver på intervallet (a, b) är $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

Exempel Beräkna längden av $f(x) = 3 + x^2$ på intervallet $(0, \sqrt{e})$.

Lösning $f'(x) = 2x$ så

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{e}} \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} \text{Substitution:} & \\ u = 2x & x = \sqrt{e} \leftrightarrow u = 2\sqrt{e} \\ du = 2\,dx & x = 0 \leftrightarrow u = 0 \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{e}} \sqrt{1 + u^2}\,du \\
&\overset{\text{(Se s. 272)}}{=} \frac{1}{4}\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln|u + \sqrt{1+u^2}|\right]_0^{2\sqrt{e}} \\
&= 0.5\sqrt{e}\sqrt{1+4e} + 0.25\ln|2\sqrt{e} + \sqrt{1+4e}| - 0 \\
&= 0.5\sqrt{e(1+4e)} + 0.25\ln(2 + \sqrt{4 + e^{-1}}) + 0.125 \quad (\approx\ 3.31767)
\end{aligned}$$

□

Rotationsytor

På samma sätt som volymen av de rotationskroppar som fås av att rotera en kurva kring x-axeln kan beräknas på det vis som tidigare angavs, kan vi med hjälp av kurvlängden även resonera oss fram till en metod att beräkna *mantelarea*, dvs arean av en sådan rotationskropp: om $f(x)$ roteras kring x-axeln så är arean av den rotationskropp som fås på intervallet (a, b)

$$\text{Mantelarean} = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

(För intuitiv förklaring, se s. 330.)

Läs extensivt s. 331−339 (avsnitt 7.6, 7.7 och 7.8).

Integraler och summor

Man kan ta hjälp av integraler vid uppskattning (ibland tom beräkning) av summor och serier.

Sats 1
Om f är kont., avtagande, positiv
så $f(n) + \int_1^n f(x)\,dx \ \leq\ \sum_{k=1}^n f(k) \ \leq\ f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$

(Beviset av denna sats fås genom att stirra ett tag på figuren längst ned på s. 340, avsnitt 7.9.)

Exempel Ange en övre och en undre gräns för serien $\sum_{k=1}^{\infty}(k+\frac{1}{2})e^{1-k-k^2}$.

Lösning Med $f(x) = (x+\frac{1}{2})e^{1-x-x^2}$ så är $f'(x) = e^{1-x-x^2}(1-\frac{1}{2}(2x+1)^2)$ där $e^{1-x-x^2} > 0$ för alla reella x och $\frac{1}{2}(2x+1)^2 > 1$ för alla $x > 1$ varmed $f' < 0$ dvs f är strängt avtagande för $x > 1$. Därmed är enligt Sats 1 ovan

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(n)+\int_1^n f(x)\,dx\right) \quad\le\quad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad\le\quad f(1)+\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Vi har att $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$ och $f(1) = e^{-1}$ och

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(x)\,dx &= \int_1^\infty (x+\tfrac{1}{2})e^{1-x-x^2}\,dx \\
&= \int_1^\infty (x+\tfrac{1}{2})e^{-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}}\,dx \\
&= \left\{\begin{array}{ll} \text{Substitution:} & \\ u=(x+\frac{1}{2})^2 & x\to\infty \leftrightarrow u\to\infty \\ du = 2(x+\frac{1}{2})\,dx & x=1 \leftrightarrow u=\frac{9}{4} \end{array}\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}e^{5/4}\int_{9/4}^\infty e^{-u}du \\
&= \tfrac{1}{2}e^{5/4}(-0-(-e^{-9/4})) \\
&= \tfrac{1}{2}e^{-1}
\end{aligned}$$

varmed $\frac{1}{2}e^{-1} \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k) \le e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1}$

dvs $0.183 \le \sum\limits_{k=1}^{\infty}(k+\frac{1}{2})e^{1-k-k^2} \le 0.552$.

$\square$

Läs s. 345−347 (avsnitt 7.10) extensivt och inte alls s. 348−352 (avsnitt 7.11).