© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 8: Differentialekvationer

För att tillämpa matematiken behöver man *modeller* som representerar konkreta förlopp. Ofta handlar förloppen om förändringar över tiden.

Antag att vi har givet (genom mätning) hur ett förlopp startat och vill förutsäga (prediktera) hur det fortsätter och slutar. För detta kan vi använda differentialekvationer.

I algebran höll vi på en hel del med *algebraiska ekvationer* som utgörs av ett eller flera villkor (likheter) och koefficienter (tal) och obekanta (variabler som representerar tal). Exempel på algebraiska funktioner är $2x+x^2=3$ och $x+e^x=1$. Lösningarna till algebraiska ekvationer är tal, nämligen de värden på variablerna så att alla villkoren är uppfyllda.

Detta avsnitt handlar om ekvationer av en annan typ, *ordinära differentialekvationer* (hädanefter förkortat ODE), där villkoren fortfarande är likheter men där koefficienterna och det som varaiblerna representerar är *funktioner*! Typiskt är också att den obekanta (funktionen) i en ODE förekommer olika många gånger deriverad. Exempel på ODE är $y(x)+y'(x)=x$ och $y'(x)/\sqrt{y'(x)}=x^2$. Lösningarna till ODE är funktioner, nämligen de funktionsformer som gör att likheterna är uppfyllda *för alla värden på funktionsvariabeln*!

ODE av typ $y'=f(x,y)$, som innehåller derivator av den obekanta, $y(x)$, endast tom ordning 1, kallas **första ordningens ODE**.

ODE av typ $y''=f(x,y,y')$, som innehåller derivator av den obekanta, $y(x)$, endast tom ordning 2, kallas **andra ordningens ODE**.

Läs Exempel 1, 2 och 3 om första ordningens ODE.

Exempel Lös ekvationen $y'=y\ln x,\ x>0$.

Lösning

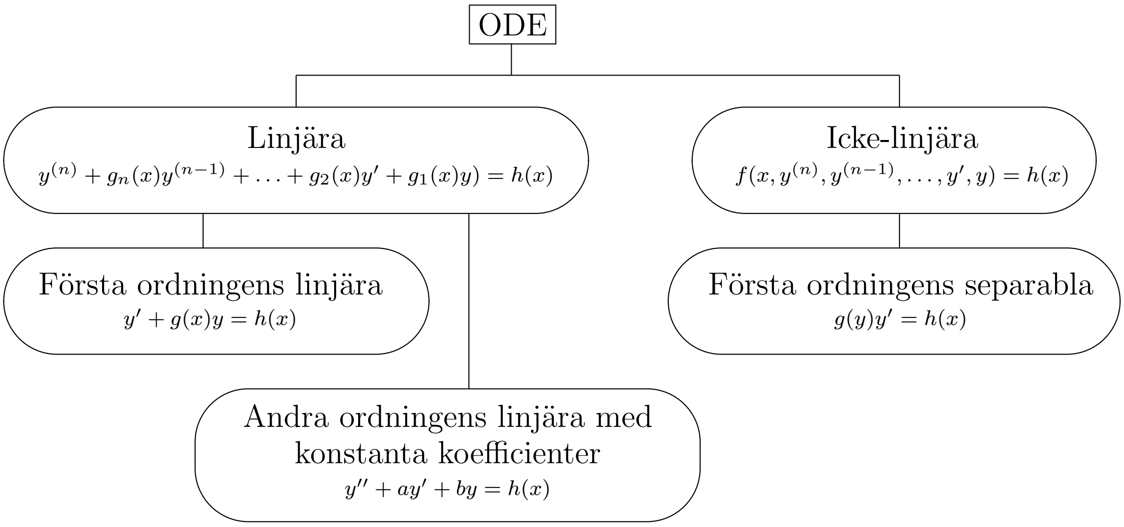
- Detta är en första ordningens ODE.
- Efter att ha lärt sig lite lösningsteknik (vilket vi snart ska göra) resonerar man sig fram till att $y=x^xe^{-x}$ borde kunna vara en lösning:
  $y=e^{x\ln x-x} \Rightarrow y'=(x\cdot\frac{1}{x}+1\cdot\ln x-1)e^{x\ln x-x}=(\ln x)y$.
- Men eftersom multiplikativa konstanter kan flyttas ut ur derivering ($\frac{d}{dx}(Cf(x))=C\,\frac{d}{dx}f(x)$) så är även $y=2x^xe^{-x}$ en lösning, ja $y=Cx^xe^{-x}$ är en lösning för varje reellt tal C.

Om det nu i uppgiften dessutom hade angivits att $y(1)=e$ kallas ekvationen för ett *begynnelsevärdesproblem* och detta andra villkor för ett *begynnelsevillkor*. För vår lösning innebär det att $e=y(1)=C\cdot 1^1e^{-1} \Rightarrow C=e^2$ varmed lösningen är entydigt bestämd: $y(x)=x^xe^{2-x}$. □

Lösningsstruktur

ODE: $f(x, y, y', y'', \ldots) = h(x)$

Skriv om ekvationen på lösbar form.
Mål: lös ut $y(x)$ som uttryck av x (ej som uttryck av y, y', y'' etc.)



Första ordningens linjära ODE: $y' + g(x)y = h(x)$

Lösningsmetod: *Integrerande faktor*

1. Beräkna $G(x) = \int g(x)\,dx$

2. Multiplicera båda led i ekvationen med $e^{G(x)}$:
   $e^{G(x)}(y'+g(x)y) = e^{G(x)}h(x)$, dvs $e^{G(x)}h(x) = e^{G(x)}y'+g(x)e^{G(x)}y' = \frac{d}{dx}(e^{G(x)}\cdot y)$

3. Integrera båda led map x:
   $e^{G(x)} \cdot y = \int e^{G(x)}h(x)\,dx + C$

4. Multiplicera båda led med $e^{-G(x)}$: $y = e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x)\,dx + Ce^{-G(x)}$

5. Sätt in eventuella begynnelsevillkor.

Exempel Lös begynnelsevärdesproblemet $(x+1)y' + \frac{1}{4}\,y = 1,\ y(0) = 1,\ x > -1\,.$

Lösning

0. Dividera med $x+1$ (ok ty $x > -1$)
   $y' + \frac{1}{4(x+1)} \cdot y = \frac{1}{x+1}$ varmed ekvationen identifieras som en första ordningens linjär ODE med $g(x) = \frac{1}{4(x+1)}$ och $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

1. $G(x) = \int \frac{dx}{4(x+1)} = \left\{ \begin{array}{c} u = x+1 \\ du = dx \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \ln|u| = \frac{1}{4} \ln|x+1| = \ln(x+1)^{1/4}$ ty $x > -1$

2. $e^{G(x)} = e^{\ln(x+1)^{1/4}} = (x+1)^{1/4}$
   $e^{-G(x)} = \left(e^{G(x)}\right)^{-1} = (x+1)^{-1/4}$
   Multiplicera båda led med $e^{G(x)}$:
   $(x+1)^{1/4}(y' + \frac{1}{4(x+1)} \cdot y) = (x+1)^{1/4} \cdot \frac{1}{x+1}$
   $\frac{d}{dx}((x+1)^{1/4} \cdot y) = (x+1)^{-3/4}$

3. Integrera map x:
   $(x+1)^{1/4} \cdot y = \int (x+1)^{-3/4} dx + C = \left\{ \begin{array}{c} u = x+1 \\ du = dx \end{array} \right\} = \frac{u^{-3/4+1}}{-3/4+1} + C = 4(x+1)^{1/4} + C$

4. Multiplicera med $e^{-G(x)}$:
   $y = (x+1)^{-1/4}(4(x+1)^{1/4} + C) = 4 + C(x+1)^{-1/4}$

5. Sätt in begynnelsevillkoret:
   $1 = y(0) = 4 + C(0+1)^{-1/4} = 4 + C \ \Rightarrow\ C = -3$
   varmed $\boxed{y = \frac{1}{4} - 3(x+1)^{-1/4}.}$

$\square$

Exempel Ett sparkonto öppnas med startbeloppet 1000 kronor. Under följande år sätts pengar in kontinuerligt med tillströmningen $200 + 120t$ kronor där t är antalet år från kontots öppnande. Räntan är 3.25% och den sätts också in på kontot. Hur mycket pengar finns på kontot efter 5 år?

Lösning Låt oss beteckna saldot på kontot med $S = S(t)$.
Då gäller att tillväxthastigheten av saldot är $\frac{dS}{dt} = 0.0325S + (200 + 120t)$ dvs

$$S' - 0.0325S = 200 + 120t$$

Detta är en första ordningens linjär ODE med $g(t) = -0.0325$ och $h(t) = 200+120t$. Vi har att $G(t) = -0.0325t$ och multiplikation av båda led med $e^{G(x)} = e^{-0.0325t}$ ger

$$e^{-0.0325t}S' - 0.0325e^{-0.0325t}S = e^{-0.0325t}(200 + 120t)$$

varmed

$$e^{-0.0325t}S = \int e^{-0.0325t}(200 + 120t)\, dt + C$$

Integreringen i högerledet blir

$$\begin{aligned}
\int e^{-0.0325t}(200 + 120t)\, dt &= \left\{ \begin{array}{ll} \text{P.I.:} & \\ g = 200 + 120t & f = e^{-0.0325t} \\ g' = 120 & F = -\frac{e^{-0.0325t}}{0.0325} \end{array} \right\} \\
&= Fg - \int Fg' \\
&= -\tfrac{e^{-0.0325t}}{0.0325}(200 + 120t) - \int -\tfrac{e^{-0.0325t}}{0.0325} 120\, dt \\
&= -\tfrac{e^{-0.0325t}}{0.0325}(200 + 120t) + \tfrac{120}{0.0325} \int e^{-0.0325t} dt \\
&= \tfrac{e^{-0.0325t}}{0.0325}(-(200 + 120t) - \tfrac{120}{0.0325}) + C
\end{aligned}$$

Multiplikation av båda led med $e^{-G(x)} = e^{0.0325t}$ ger därmed att

$$S(t) \ = \ \frac{1}{0.0325}\Big(- (200 + 120t) - \frac{120}{0.0325}\Big) + Ce^{0.0325t}$$

Begynnelsevillkoret i denna uppgift är att startbeloppet är 1000 kronor, dvs $S(0) = 1000$. Vi får att $1000 = S(0) = -\frac{200}{0.0325} - \frac{120}{0.0325^2} + C$ dvs att $C \approx 120\,763.3$ varmed beloppet efter 5 år är

$$S(5) \ = \ \frac{1}{0.0325}\Big(- (200 + 120 \cdot 5) - \frac{120}{0.0325}\Big) + 120\,763.3\, e^{0.0325 \cdot 5} \ = \ 3\,846.95 \text{ kronor.}$$

□