Högskolan i Halmstad

Kapitel 3: Derivata

Om man ska välja ut något avsnitt ur denna kurs som "det viktigaste" är det nog detta. Dels är det nödvändigt för att kunna besvara frågor som direkt handlar om derivering men inte minst är det centralt inom hela analysen och för förståelsen av det som härefter kommer: en kolossalt stor del av den matematiska analysen vilar på begreppet derivata.

Låt $f(x)$ vara värdet för någon storhet som en funktion av den reella variabeln x (som kan vara t ex tid eller läge). Då anger $f(b) - f(a)$ *förändringen* av $f(x)$ över intervallet (a, b) och $(f(b) - f(a))/(b - a)$ den genomsnittliga *hastigheten* (om x är tid) eller *lutningen* (om x är läge) av denna förändring. Gränsvärdet $\lim_{b\to a}(f(b) - f(a))/(b - a)$ är hastigheten/lutningen av f i punkten a.

Definition Om gränsvärdet

$$f'(x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existerar kallas funktionen f **deriverbar** i punkten x och f' **derivatan** av f med avseende på x.

I föregående avsnitt nämndes att $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. I allmänhet gäller att för varje reellt tal $c \neq 0$ är $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{c}{n})^n = e^c$.

Exempel Låt $f(x) = \ln(1 + x)$. Beräkna derivatan av $f(x)$.

Lösning

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h+1)-\ln(x+1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x+h+1}{x+1})}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x+1}\right)\\
&\overset{a=1/h}{=} \lim_{a\to\infty} a\,\ln\left(1+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\\
&\overset{\ln(\cdot)\text{ kont.}}{=} \ln\lim_{a\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x+1}\right)^a}_{\to e^{1/(1+x)}}\\
&= \frac{1}{1+x}
\end{aligned}$$

□

Uppgifter av typ exemplet ovan är tänkta att påtagligt illustrera hur derivata kan härledas via definitionen. Men mha deriveringsregler som vi strax ska se blir deriveringsproceduren enklare att genomföra på annat sätt än gränsvärdesberäkning.

Derivatan av en funktion, $f(x)$, med avseende på variabeln x kan betecknas på många sätt. De vanligaste är

$$f'(x) \qquad \frac{d}{dx}f(x) \qquad \frac{df}{dx}(x) \qquad D(f(x))$$

Om $f(t)$ anger den sträcka ett föremål färdas som funktion av tiden t, så anger **förstaderivatan** av f hastigheten och **andraderivatan** av f *accelerationen*. Andraderivatan av $f(x)$ definieras som *derivatan av derivatan av* $f(x)$ och betecknas

$$f''(x) \qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x) \qquad \frac{d^2f}{dx^2}(x) \qquad D^2(f(x))$$

Deriveringsregler

Om f och g är deriverbara och c är en konstant gäller följande regler.

Allmänna

I. $D(cf(x)) = cD(f(x))$

II. $D(c) = 0$

III. $D(f(x) + g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$

IV. Produktregeln: $D(f(x)g(x)) = D(f(x))g(x) + f(x)D(g(x))$

V. Kedjeregeln: $D(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ [läs beviset s. 188−189]

(Observera hur man kan bevisa produktregeln genom att derivera
$\ln|f| = \ln|f_1 \cdot f_2 \cdot f_3| = \ln|f_1| + \ln|f_2| + \ln|f_3|$
– exempel 17, s. 196 – istället för att derivera f.)

Speciella

VI. $D(x^c) = cx^{c-1}$

VII. $D(e^x) = e^x$

VIII. $D(\ln x) = 1/x$

IX. $D(\sin x) = \cos x$

Dessa nio enkla (?) regler sammanfattar i princip allt man behöver kunna utantill − resten kan man alltid resonera sig fram till. Det kan kanske verka som att det här med derivata var en enkel match. Men det är nog ändå inte alltid så enkelt... Mycket övning återstår!

Exempel Beräkna andraderivatan av (a) $x\ln x$ (b) e^{e^x}

Lösning

(a) $D(x\ln n) = \ln x + 1$
$D^2(x\ln n) = D(\ln x + 1) = \underline{1/x}$

(b) $D(e^{e^x}) = e^{e^x}D(e^x) = e^{e^x}e^x = e^{x+e^x}$
$D^2(e^{e^x}) = D(e^{x+e^x}) = e^{x+e^x}D(x+e^x) = e^{x+e^x}(1+e^x) = \underline{e^{x+e^x} + e^{2x+e^x}}$

□

Läs om implicit derivering och derivata av invers funktion (s. 190 − 193).

Exempel Derivera $f(x) = \arctan x$

Lösning
$x = f^{-1}(y) = \tan y$ och
eftersom $\frac{d}{dy}(f^{-1}(y)) = 1/f'(x)$ så är $\frac{d}{dy}(\tan y) = 1/f'(x)$ dvs
$f'(x) = 1/\frac{d}{dy}(\tan y) = \left(\frac{d}{dy}(\frac{\sin y}{\cos y})\right)^{-1} = (\frac{\cos y \cdot \cos y - \sin y \cdot (-\sin y)}{\cos^2 y})^{-1} =$
$\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \cos^2 y$. Men vad är då $\cos^2 y$? Jo, vi har att $y = \arctan x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} \Rightarrow 1 + x^2 = 1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y$. Därmed är $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$\square$

Exempel Derivera map x
(a) $x(x+2)$ (b) $x \ln x$ (c) $\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2}$ (d) $(x+1)^{x+1}$ (e) $\cos x$

Lösning
(a) $x(x+2) = x^2 + 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow D(x(x+2)) \overset{\text{III}}{=} D(x^2) + D(2x) \overset{\text{VI, I}}{=} \underline{2x+2}$

(b) $D(x \ln x) \overset{\text{IV}}{=} D(x) \ln x + xD(\ln x) \overset{\text{VI, VIII}}{=} 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \underline{\ln x + 1}$

(c) Med $f(x) = (x+a)^2$ och $g(x) = x^2 + a^2$ är
$D\Big(\dfrac{f(x)}{g(x)}\Big) = D(f(x)(g(x))^{-1}) \overset{\text{IV}}{=} D(f(x))g(x)^{-1} + f(x)D(g(x)^{-1}) \overset{\text{V, VI}}{=}$
$\overset{\text{V, VI}}{=} \dfrac{D(f(x))}{g(x)} + f(x)(-1)(g(x))^{-2}D(g(x)) = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.
Eftersom $D(f(x)) = D((x+a)^2) \overset{\text{V, VI}}{=} 2(x+a)$ och $D(g(x)) = D(x^2+a^2) \overset{\text{VI, I}}{=} 2x$
varmed slutligen
$D\Big(\dfrac{(x+a)^2}{x^2+a^2}\Big) = \dfrac{2(x+a)}{x^2+a^2} - \dfrac{(x+a)^2 2x}{(x^2+a^2)^2} = \dfrac{2(x+a)(x^2+a^2) - (x+a)^2 2x}{(x^2+a^2)^2} =$
$\dfrac{2(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 - x^3 - 2ax^2 - a^2x)}{(x^2+a^2)^2} = \boxed{\dfrac{2a(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2}}$

(d) Observera först att $(x+1)^{x+1} = (x+1)^x(x+1)$ och att
$(x+1)^x = e^{\ln(x+1)^x} = e^{x\ln(x+1)}$.
Likt i (b) är $D(x\ln(x+1)) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$ och
enligt kedjeregeln är $D(e^{x\ln(x+1)}) = e^{x\ln(x+1)}(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1})$
så enligt produktregeln är
$D((x+1)^{x+1}) = D((x+1)^x)(x+1) + (x+1)^x D(x+1) =$
$= e^{x\ln(x+1)}\Big(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\Big)(x+1) + (x+1)^x \cdot 1 =$
$= (x+1)^x(\ln(x+1)^x + x) + (x+1)^x = \underline{(x+1)^x \ln(x+1)^x + (x+1)^{x+1}}$

(e) $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ så
$D(\cos x) = D(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)(-1) = \underline{-\sin x}$

$\square$