Högskolan i Halmstad

forts. kapitel 3: Derivata

Extrempunkter

Lär **lokalt max**, **lokalt maxvärde**, **lokalt min**, **lokalt minvärde** och **lokal extrempunkt**.

(**Sats 13** f har inre lokal extrempunkt $x_0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$.)

Sats 14 Medelvärdessatsen
Om f kont. på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b)
så finns $\xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Läs beviset!

Exempel Visa att $\sqrt{|\ln \frac{a+1}{b}|} \to 0$ då $a, b \in (n, n+1)$ och $n \to \infty$.

Lösning Låt $c = b - 1$. Då är $\sqrt{|\ln \frac{a+1}{b}|} = \sqrt{|\ln(a+1) - \ln(c+1)|}$.
Enligt medelvärdessatsen finns $\xi \in (b, a+1) = (c+1, a+1) \subseteq (n, n+2)$
sådant att $\ln(a+1) - \ln(c+1) = \Big((a+1) - (c+1)\Big) f'(\xi) = \dfrac{a-c}{\xi+1}$.
Eftersom $c \in (n-1, n)$, $a \in (n, n+1)$ och $\xi \in (n, n+2)$ har vi att

$$0 \;=\; \frac{n-n}{n+1} \;\leq\; \frac{a-c}{\xi+1} \;\leq\; \frac{n+1-(n-1)}{n+1} \;=\; \frac{2}{n+1} \;\to\; 0$$

då $n \to \infty$, varmed $\frac{a-c}{\xi+1} \to 0$ enligt instängningsregeln.
Funktionen $\sqrt{|\cdot|}$ är kontinuerlig och därför har vi sammanfattningsvis att

$$\sqrt{\left|\ln \frac{a+1}{b}\right|} \;=\; \sqrt{\left|\frac{a-c}{\xi+1}\right|} \;\to\; \sqrt{|0|} \;=\; 0 \quad \text{då } n \to \infty \qquad \square$$

Exempel Pelle ska laga en takpanna på ett 15 meter högt hus. Då han ska byta den trasiga tegelpannan mot en ny slänger han den trasiga i en båge från taket där höjden $h(t)$ över marken beskrivs av $h(t) = -5t^2 + 22 + 15$ där t är tiden i sekunder från att han har kastat.

(a) En förbipasserande mås funderar oroligt över om pannan når upp till måsens höjd 40 meter över marken. Gör den det?

(b) Den trasiga tegelpannan vet att den kommer att gå sönder ännu mer om den slår emot marken med mer än 40 meter/sekund. Gör den det?

Lösning

(a) $v(t) = h'(t) = -10t + 22$. För att finna den maximala höjden löser vi ekvationen $h'(t) = 0$ och kontrollerar att detta är ett maximum.
$-10t + 22 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{22}{10} = 2.2$.
Teckenstudium:

t	0	2.2	3
h'	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$	max	$\searrow$

$h(2.2) = -5\cdot 2.2^2 + 22\cdot 2.2 + 15 = -24.2 + 48.4 + 15 = 39.2$

Alltså kan måsen vara trygg: <u>takpannan når ej upp till 40 meter över marken.</u>

(b) För att beräkna hastigheten $v(t)$ då takpannan slår i marken måste vi först beräkna vid vilken tid t den gör det. Tiden fås av att höjden över marken $h(t) = 0$:
$0 = h(t) = -5t^2 + 22 + 15 \;=\; t^2 - \frac{22}{5}t - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{11}{5} \pm \sqrt{\frac{484}{25} + \frac{75}{25}} = \frac{11 \pm \sqrt{559}}{5}$.
Eftersom $11 < \sqrt{559}$ är det den positiva roten $t = \frac{11+\sqrt{559}}{5}$ som är aktuell här.
Vi får att hastigheten är $v(\frac{11+\sqrt{559}}{5}) = -10 \cdot \frac{11+\sqrt{559}}{5} + 22$.
Hastigheten mot marken är *den negativa hastigheten över marken*. Därför ska $-10 \cdot \frac{11+\sqrt{559}}{5} + 22$ jämföras med -40, dvs vara större än -40 för att takpannan ska "klara sig". Dvs $10 \cdot \frac{11+\sqrt{559}}{5} - 22 < 40$ dvs $2(11 + \sqrt{559}) < 62$ dvs $2\sqrt{559} < 40$. Men $2\sqrt{559} \not< 2\sqrt{400} = 40$, så <u>tyvärr klarar sig tegelpannan inte.</u> □

Avsnitt 3.6, 3.7 och 3.8 är frivillig läsning (dvs ingår ej i kursen).