© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

forts. kapitel 8: Differentialekvationer

Första ordningens separabla ODE: $y'g(y) = h(x)$

Lösningsmetod: *Kedjeregeln*

1. Beräkna $G(y) = \int g(y)\,dy$

2. Skriv som derivata av sammansatt funktion:
   $g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$

3. Multiplicera med dx och integrera:
   $g(y)\,dy = h(x)\,dx$
   $G(y) := \int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx =: H(x)$

4. Lös ut $y(x)$ ur $G(y(x)) = H(x)$

5. Sätt in eventuella begynnelsevillkor.

Exempel Lös begynnelsevärdesproblemet $y'/\sqrt{y} = x^2,\ y(0) = 1/8\,.$

Lösning

0. Separabel ODE med $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $h(x) = x^2$
1. $G(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}\,dy = \int y^{-1/2}dy = \frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2\sqrt{y}$
2. $\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = x^2$
3. $\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = x^2\,dx$
   $2\sqrt{y} = \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$
4. $\sqrt{y} = \frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} + C) = \frac{x^3}{6} + \frac{C}{2}$
   $y(x) = (\frac{x^3}{6} + \frac{C}{2})^2$
5. $\frac{1}{8} = y(0) = \frac{C^2}{4} \Rightarrow C = \pm 2$
   varmed ekvationen har de 2 lösningarna $\left\{\begin{array}{rcl} y_1(x) & = & (\frac{x^3}{6} - 1)^2 \\ y_2(x) & = & (\frac{x^3}{6} + 1)^2 \end{array}\right.$

□

Vid lösandet av en första ordningens ODE, $f(x, y, y') = h(x)$ kan det ibland underlätta att införa en *hjälpfunktion*, $w(x, y)$, uttrycka ekvationen som en ODE map w, lösa den och sedan substituera tillbaka y. (Att jag använder bokstaven w istället för bokens z är för att undvika förväxling eftersom mina bokstäver ibland är små...)

Exempel För vilka x är y definierad om $y^{x^2 y \ln y} = y^y e^{xy'}$ där $y(1) = \sqrt{e}$?

Lösning Under antagandet att $y > 0$ ger logaritmering av båda led att $(x^2 y \ln y) \ln y = y \ln y + xy' \Rightarrow y \ln y(x^2 \ln y - 1) = xy' \Rightarrow x^2 \ln y = 1 + \frac{xy'}{y \ln y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (x \ln y)^2 = \ln y + \frac{xy'}{y} \qquad (*)$$

Låt nu $w = x \ln y$. Då är $w' = \ln y + xy' \frac{1}{y}$, dvs $(*) \Leftrightarrow w^2 = w'$. Detta är en separabel ODE och vi har att $\frac{d}{dx}(-\frac{1}{w}) = 1 \Rightarrow \frac{1}{w} = C - x \Rightarrow w = \frac{1}{C-x}$. Genom att substituera tillbaka $w = x \ln y$ har vi därmed att $x \ln y = \frac{1}{C-x} \Rightarrow$ $\Rightarrow \ln y = \frac{1}{x(C-x)} \Rightarrow y = e^{1/(x(C-x))}$ (där vi ser att antagandet $y > 0$ är uppfyllt för alla $x \neq 0$ och $x \neq C$). Insättning av begynnelsevillkoret $y(1) = \sqrt{e}$ ger slutligen att $e^{1/2} = e^{1/(1 \cdot (C-1))} \Rightarrow C = 3$ varmed lösningen är

$$y(x) = e^{\frac{1}{x(3-x)}} \quad \text{som är definierad för } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$\square$

Exempel Avgör om ekvationerna är linjära eller separabla och lös dem:
(a) $\sqrt{x+1} - 2y' \frac{x+1}{x+y} = \frac{1}{2(x+y)}$, $x > -1$ (b) $y' = x^2 y^3$

Lösning

(a) Omskrivning av ekvationen ger $2(y+x)\sqrt{x+1} - 4(x+1)y' = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2y\sqrt{x+1} - 4(x+1)y' = 1 - 2x\sqrt{x+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow y - 2y'\sqrt{x+1} = \frac{1-2x\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - x$ varmed ekvationen kan identifieras som linjär med $g(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ och $h(x) = \frac{2x\sqrt{x+1}}{4(x+1)} = \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$.
Vi har att $G(x) = -\int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = -\sqrt{x+1}$.
Multiplikation i båda led med $e^{-G(x)}$ ger att
$y' e^{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} y = \frac{x}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}}$
varmed $ye^{\sqrt{x}} = \int \frac{x}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} dx = \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Substitution:} & \\ u = \sqrt{x+1} & x = u^2 - 1 \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx & dx = 2u\, du \end{array} \right\} = \int \frac{u^2-1}{2u} e^u 2u\, du =$
$= \int u^2 e^u du - \int e^u du$ där
$\int u^2 e^u du = \{P.I.: \ g = u^2 \ \ f = e^u\} = Fg - \in Fg' = e^u u^2 - \int 2ue^u du =$
$= \{P.I.: \ g = u \ \ f = e^u\} = e^u u^2 - 2(e^u u - e^u) + C$ varmed
$ye^{\sqrt{x+1}} = e^u(u^2 - 2u + 1 - 1) + C = \sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1} - 2) + C$
och $y(x) = \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} - 2) + Ce^{-\sqrt{x+1}} = x + 1 - 2\sqrt{x+1} + Ce^{-\sqrt{x+1}}$.

(b) Vi har att $\frac{dy}{y^3} = x^2 dx$ varmed ekvationen är separabel och integration ger att $\int \frac{dy}{y^3} = \frac{y^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{2y^2} = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{C}{6}$. Ur detta löses y ut: $\frac{1}{y^2} = -\frac{2x^3 - C}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 = \frac{3}{C - 2x^3} \Rightarrow y_1(x) = -\sqrt{3/(C - 2x^3)}$ och $y_2(x) = \sqrt{3/(C - 2x^3)}$. $\square$

Integralekvationer

Detta är ekvationer där den obekanta funktionen y "ensam" samt integraler med y i integranden ingår.

Exempel Lös fullständigt integralekvationen $y(x) = \int_{\sqrt{\pi}/3}^{x} 4t\sqrt{y(t)(1-y(t))}\,dt$ map $y(x)$ för $\frac{\sqrt{\pi}}{3} < x < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Lösning Derivering av båda led ger enligt IMVS att $y' = 4x\sqrt{y(1-y)} \Rightarrow$
$\Rightarrow y' \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} = 4x$ som är separabel med $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}$ och $h(x) = 4x$, $y \in (0,1)$.
$G(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{4}(1-(2y-1)^2)}} = \int \frac{2}{\sqrt{1-(2y-1)^2}}\,dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ u = 2y-1 \\ du = 2\,dy \end{array} \right\} =$
$= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u = \arcsin(2y-1)$ och $H(x) = 2x^2 + C$.
Detta innebär att $\arcsin(2y-1) = 2x^2 + C$ dvs $y = \frac{1}{2}(\sin(2x^2 + C) + 1)$.
Eftersom $y(\frac{\sqrt{\pi}}{3}) = \int\limits_{\sqrt{\pi}/3}^{\sqrt{\pi}/3} 4t\sqrt{y(t)(1-y(t))}\,dt = 0$ har vi att
$0 = y(\frac{\sqrt{\pi}}{3}) = \frac{1}{2}(\sin(\frac{2\pi}{9} + C) + 1) \Rightarrow -1 = \sin(\frac{2\pi}{9} + C)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2\pi}{9} + C = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow C = -\frac{9\pi}{18} - \frac{4\pi}{18} = -\frac{13}{18}\pi$.
Slutligen är därmed lösningen: $y(x) = \frac{1}{2}(\sin(2x^2 - \frac{13}{18}\pi) + 1)$. $\square$

Se även Exempel 13 i boken.
Exempel 14 är intressant men kan betraktas som lite överkurs (extensivt).