Högskolan i Halmstad

forts. kapitel 8: Differentialekvationer

Andra ordningens ODE med konstanta koefficienter: $y'' + ay' + by = h(x)$

För att lösa denna typ av ODE tar vi successivt itu med mer och mer krävande högerled, $h(x)$. Några av de inledande högerleden är följande. Det enklaste fallet är då $h(x) \equiv 0$ och då kallas ekvationen **homogen**.

Lösning av den homogena ekvationen, $y'' + ay' + by = 0$

Om $b = 0$ så kan båda led integreras varmed är ekvationen är en första ordningens linjär ODE med lösning enligt vad som tidigare gåtts igenom. Vi kan alltså utan inskränkning förutsätta att $b \neq 0$.

Sats 2 & 3 (s. 378, 381 avsnitt 8.6.) [Läs beviset!]
Om $y'' + ay' + by = 0$ där a och $b \neq 0$ konstanta map x
r_1, r_2 lösningar till den **karakteristiska ekvationen**: $r^2 + ar + b = 0$
så fås den allmänna lösningen till ekvationen av att
1. $r_1 \neq r_2 \;\Rightarrow\; y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
2. $r_1 = r_2 = r \;\Rightarrow\; y = Ae^{rx} + Bxe^{rx}$
3. $r = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ (specialfall av 1.)

Lösning av ODE med mer allmänt högerled, $y'' + ay' + by = h(x) \not\equiv 0$

- En **partikulärlösning**, y_p, är en *ej* allmän lösning till en ODE
- **Sats 1** (s. 376, avsnitt 8.5.) [Läs beviset!]
  Om a och b konstanta map x
  y_h allmän lösning till den homogena ekvationen, $y'' + ay' + by = 0$
  y_p partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h(x)$
  så $y = y_p + y_h \;\Leftrightarrow\; y$ allmän lösning av $y'' + ay' + by = h(x)$
- **Följd av Sats 1** (s. 393, avsnitt 8.7.)
  Om a och b konstanta map x
  y_1 partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h_1(x)$
  y_2 partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h_2(x)$
  så $y_p = y_1 + y_2$ partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h_1(x) + h_2(x)$
- Partikulärlösning om $h(x)$ är ett polynom

  Exempel Finn en lösning till $y'' + y' + y = x^3$.

  Lösning Ansätt $y_p = a + bx + cx^2 + x^3$ (Varför? Varför inte $y_p = \ldots + dx^3$?)
  $y_p' = b + 2cx + 3x^2$, $y_p'' = 2c + 6x \quad\Rightarrow$
  $\Rightarrow \quad y_p'' + y_p' + y_p = x^3 + x^2(c+3) + x(b+2c+6) + (a+b+2c) = x^3 \quad \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \begin{cases} a+b+2c = 0 \\ b+2c = -6 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad y_p = 6 - 3x^2 + x^3.$$

  Kontroll: $y_p'' + y_p' + y_p = (-6+6x) + (-6x+3x^2) + (6-3x^2+x^3) = x^3$ (ok!) □

Den allmänna proceduren är

- Ansätt y_p polynom av grad n (samma grad som h)
- Beräkna y_p' och y_p''
- Identifiera koefficienter för $1, x, x^2, \ldots, x^n$
- Lös ekvationssystemet
- Kontrollera!

• Partikulärlösning om $h(x) = p(x)e^{kx}$ där $p(x)$ är ett polynom

Ansätt $y_p = ze^{kx} \Rightarrow y_p' = z'e^{kx} + kze^{kx},\ y_p'' = z''e^{kx} + 2kz'e^{kx} + k^2ze^{kx} \Rightarrow$ $\Rightarrow y_p'' + ay_p' + by_p = (z'' + (2k+a)z' + (k^2 + ak + b)z)e^{kx} = p(x)e^{kx}$ där $e^{kx} > 0$ varmed $z'' + (2k+a)z' + (k^2 + ak + b)z = p(x)$ $(*)$ är en ODE med polynom-högerled. Denna ekvation löses enligt föregående steg vilket ger z_p som satisfierar $(*)$. Därmed satisfierar även $y_p = z_pe^{kx}$ ekvationen $y'' + ay' + by = p(x)e^{kx}$.

Exempel Lös fullständigt begynnelsevärdesproblemet
$y'' - 6y' + 34y = x^2 - 2e^{7x},\ y'(0) = 11,\ y''(0) = -1.$

Lösning

Hom. ekv. $r^2 - 6r + 34 = 0 \Rightarrow r = 3 \pm 5i \Rightarrow y_h = e^{3x}(A\cos 5x + B\sin 5x)$

$h_1(x)$ $y_1'' - 6y_1' + 34y_1 = x^2$

$$y_1 = x^2 + cx + d \Rightarrow y_1' = 2x + c,\ y_1'' = 2$$
$$\Rightarrow y_1'' - 6y_1' + 34y_1 = x^2 + x(34c - 12) + (34d - 6c + 2)$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 34c & = & 12 \\ 34d - 6c & = & -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 6/17 \\ d & = & 1/17^2 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow y_1 = x^2 + \tfrac{6}{17}x + \tfrac{1}{289}$$

$h_2(x)$ $y_2'' - 6y_2' + 34y_2 = -2e^{7x}$. Låt $y_2 = ze^{7x}$.

$$\Rightarrow y_2' = z'e^{7x} + 7ze^{7x},\ y_2'' = z''e^{7x} + 14z'e^{7x} + 49ze^{7x}$$
$$\Rightarrow y_2'' - 6y_2' + 34y_2 = z''e^{7x} + 14z'e^{7x} + 49ze^{7x} - 6(z'e^{7x} + 7ze^{7x}) + 34ze^{7x}$$
$$= e^{7x}(z'' + 8z' + 41z) = -2e^{7x} \Rightarrow z = -\tfrac{2}{41} \Rightarrow y_2 = -\tfrac{2}{41}e^{7x}$$

$y = y_h + y_p$ $y = e^{3x}(A\cos 5x + B\sin 5x) + x^2 + \tfrac{6}{17}x + \tfrac{1}{289} - \tfrac{2}{41}e^{7x}$

$$\Rightarrow y' = e^{3x}((3A + 5B)\cos 5x + (3B - 5A)\sin 5x)$$
$$\Rightarrow y'' = e^{3x}\big(\{3(3A+5B) + 5(3B-5A)\}\cos 5x + \{3(3B-5A) - 5(3A+5B)\}\sin 5x\big)$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lrcl} y'(0): & 3A + 5B & = & 11 \\ y''(0): & 9A + 15B + 15B - 25A & = & -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 2 \\ B & = & 1 \end{array}\right.$$

varmed slutligen $\boxed{y(x) = e^{3x}(2\cos 5x + \sin 5x) + x^2 + \tfrac{6}{17}x + \tfrac{1}{289} - \tfrac{2}{41}e^{7x}}$

□

Läs resten av kapitlet (dvs (D), (E), (F), avsnitt 8.8, 8.9) extensivt.