Högskolan i Halmstad

Kapitel 2: Gränsvärden

Här är man intresserad av vad som händer med ett uttryck eller en funktion då en variabel eller parameter springer iväg mot plus oändligheten: "$f(x) \to A$ då $x \to \infty$" eller "$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$", mot minus oändligheten: "$f(x) \to A$ då $x \to -\infty$" eller "$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$", eller närmar sig ett visst värde a: "$f(x) \to A$ då $x \to a$" eller "$\lim_{x\to a} f(x) = A$".

I boken definieras "$f(x)$ har gränsvärdet A då $x \to \infty$" med att

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \omega : (x > \omega \text{ och } x \in D_f \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \epsilon)$$

Om "$x > \omega$" byts mot "$x < \omega$" fås definitionen av "$f(x)$ har gränsvärdet A då $x \to -\infty$".

Om "$x > \omega$" byts mot "$|x - \delta| < \omega$ fås definitionen av "$f(x)$ har gränsvärdet A då $x \to \delta$".

Exempel Visa att $\dfrac{x + \sin x}{x} \to 1$ då $x \to \infty$.

Lösning Vi ska visa att hur litet än $\epsilon > 0$ är så kan ω alltid väljas så stort att $x > \omega \ \Rightarrow\ 1 - \epsilon < \frac{x+\sin x}{x} < 1 + \epsilon$, dvs $|\frac{x+\sin x}{x} - 1| < \epsilon$, dvs $|\frac{x+\sin x - x}{x}| < \epsilon$, dvs $|\frac{\sin x}{x}| < \epsilon$.

Vi är bara intresserade av uttryckets värde för stora positiva värden på x och då är $|\frac{\sin x}{x}| \le \frac{1}{x}$ eftersom $|\sin x| \le 1$. Nu vill vi att $\frac{1}{x}$ ska bli mindre än ϵ för något smart val av x (eller egentligen av ω som x ska vara större än).

Antag att $x > 1/\epsilon$. Då är $\frac{1}{x} < \epsilon$, dvs med $\omega = 1/\epsilon$ har vi att för $x > \omega$ är

$$\left|\frac{x + \sin x}{x} - 1\right| \ =\ \left|\frac{\sin x}{x}\right| \ \le\ \frac{1}{x} \ <\ \frac{1}{1/\epsilon} \ =\ \epsilon\,.$$

□

En typ av gränsvärden som en stor del av denna kurs kommer att handla om är $D(f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Exempel Beräkna $D(f(x))$ om $f(x) = x^2(1+x)$.

Lösning

$$\begin{aligned}
D(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2(x+h+1)-x^2(x+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h2)(x+h+1)-x^3-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(x^2+2x^2+2xh+2x+xh+h^2+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ 3x^2+2x+h(2x+x+h+1) \right\} \\
&= 3x^2+2x
\end{aligned}$$

□

Obs. att gränsvärdet kan bli olika saker beroende på om man kommer från höger, från de positiva talen (vilket skrivs $x \to a^+$ och kallas **högergränsvärde**) eller om man kommer från vänster, från de negativa talen (skrivs $x \to a^-$ och kallas **vänstergränsvärde**).

Exempel Beräkna gränsvärdet av $\frac{x+2|\sin x|}{2x}$ då $x \to 0^+$ respektive $x \to 0^-$.

Lösning För $x \to 0^+$, antag att $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Då är $0 < \sin x < 1$ och

$$\frac{x+2|\sin x|}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{x} \to \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

För $x \to 0^-$, antag att $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Eftersom $\sin(-x) = -\sin x$ kan vi med $y = -x$ ekvivalent betrakta högergränsvärdet $y \to 0^+$:

$$\frac{-y+2|\sin(-y)|}{2(-y)|} = \frac{1}{2} + \frac{|-\sin y|}{-y} = \frac{1}{2} - \frac{\sin y}{y} \to -\frac{1}{2}.$$

□

Regler

$\Big[$ $\lim f = 0,\ g$ begr. $\quad \Rightarrow \quad \lim fg = 0$

$$\left[\begin{array}{ll}
\text{Om} & \lim f = A < \infty,\ \lim g = B < \infty \\
\text{så} & \lim(f+g) = A+B \\
& \lim fg = AB \\
& \lim \frac{f}{g} = \frac{A}{B} \text{ om dessutom } B \neq 0
\end{array}\right.$$

$\Big[$ $\lim_{x\to b} g(x) = a,\ \lim_{t\to a} f(t) = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to b} f(g(x)) = A$

$\Big[$ $\lim f = A,\ \lim g = A,\ f \le h \le g \quad \Rightarrow \quad \lim h = A$

Om $f(x)$ har *ändligt* gränsvärde då "$x \to$ nånting" säger man att detta gränsvärde **existerar**. Om $\lim f = A < \infty$ säger man att f **konvergerar** mot A, om inte säger man att f **divergerar**. (Obs. att f divergerar innebär inte nödvändigtvis att $\lim |f| = \infty$: t ex $\lim_{x\to\infty} x \sin x$ svänger mer och mer våldsamt omkring x-axeln, än åt de negativa talen, än åt de positiva. Tydligt är att f inte är konvergent men det gäller varken att $f \to \infty$ eller att $f \to -\infty$. Att $\lim f$ ej existerar innebär *inte* heller att $\lim |f| \to \infty$, t ex med $f(x) = \sin x$: $\nexists \lim f$ och $\nexists \lim |f|$ men $|f| \not\to \infty$.)

$\big[\ f \le g,\ \exists \lim f, \lim g \quad \Rightarrow \quad \lim f \le \lim g$

Läs Exempel $3 - 10$.

Exempel Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ då $a_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{då } n = 0 \\ \sqrt{6 + a_n} & \text{då } n \ge 1 \end{cases}$

Lösning Under förutsättning att gränsvärdet existerar är

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} a_n}$$

dvs om $a_n \to A$ då $n \to \infty$ så är

$$A = \sqrt{6 + A} \quad \Rightarrow \quad A^2 - A - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 6} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

där efter insättning det visar sig att endast $A = 3$ löser ekvationen. Därmed är alltså $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$. □

Exempel Beräkna $(x + 1)^{2x+2}$ då $x \to -1^+$.

Lösning Låt $y = x + 1$. Då är uttrycket $(x+1)^{2x+2} = y^{2y}$ och $x \to -1^+ \Leftrightarrow y \to 0^+$ (man måste tänka efter lite så att det stämmer att man kommer från samma håll...), dvs vi ska beräkna $\lim_{y\to 0^+} y^{2y}$.

Det är klart att $\log y^{2y} = 2y \log y$ så om vi kan visa att $2y \log y \to a$ så gäller (enligt Sats 3, sammansättningsregeln) att $y^{2y} \to e^a$ då $y \to 0^+$. Enl. Exempel 8 är $\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0$ för alla $\alpha > 0$ (detta är ett s.k. standardgränsvärde som man får använda utan vidare härledning, se nedan). Därmed är $2 \cdot y \log y \to 2 \cdot 0 = 0$ då $y \to 0^+$ varmed $y^{2y} \to e^0 = 1$ då $y \to 0^+$. □

Läs Exempel $12 - 14$.

Talet e

Sats 6 Följden $(1+\frac{1}{n})^n$ är växande och uppåt begränsad.

Läs beviset!

Definition Satsen ovan anger att gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ existerar och vi låter detta gränsvärde vara definitionen av talet $e \approx 2.718$.

Läs exemplen $15-16$.

Standardgränsvärden

Det finns några vanligt återkommande gränsvärden (s.k. **standardgränsvärden**) som kan vara bra att känna till och ej behöva härleda varje enskild gång man behöver dem. Ett försök till sammanfattning av dessa är:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha/a^x = 0 \text{ där } \alpha > 0,\ a > 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0 \text{ där } \alpha > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}+1\right)^n = e \quad \text{(se s. } 155-157)$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0 \text{ där } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$