Högskolan i Halmstad

forts. Kapitel 2: Gränsvärden

Bestämning av asymptoter

En *asymptot till en kurva* är en rät linje som kurvan närmar sig då dess avstånd till origo går mot oändligheten (se ordentlig defintion s. 157 och illustrerande bild s. 158).

Exempel Bestäm alla asymptoter till

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \sin x - x^2}{\sqrt{\sin x + 1 + x^2}}$$

Lösning Nämnaren är skild från 0 för alla $x \in \mathbb{R}$ och eftersom $|\sin x| \le 1$ så är $f(x)$, för stora värden på x, väsentligen $\frac{-x^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{-x^2}{|x|} = -|x|$.

<u>Svar: Asymptoterna är $y = x$ då $x \to -\infty$ och $y = -x$ då $x \to \infty$.</u> $\square$

Observera dock att $\exists \lim_{x\to\infty} |\frac{f(x)}{x}| \neq 0$ *inte* implicerar att $\exists \lim_{x\to\infty} |f(x) - x|$.
T ex med $f(x) = x + \sin x$ är $|\frac{f(x)}{x}| = |\frac{x+\sin x}{x}| \to 1$ men $|f(x) - x| = |\sin x|$ som ej har gränsvärde då $x \to \infty$.

Rekursion

Rekursion har vi redan gått igenom i *Delkurs 1: Introduktionskurs i Matematik* men på s. 166–170 är en liten repetition av det vi lärde oss då.

Serier

Defintion En **geometrisk serie** är en serie på formen $\sum_{k}^{\infty} x^k$.

[En geometrisk serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ är konvergent <u>omm</u> $|x| < 1$. Då är den $\frac{1}{1-x}$

Detta bevisas genom att först bevisa Sats 5, s. 57, och sedan låta n gå mot oändligheten för olika fall av x:

$\lvert x\rvert < 1$	$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \to \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x},\ x \to \infty$	[KONVERGENT]
$x = 1$	$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1^n = n \to \infty,\ n \to \infty$	[DIVERGENT]
$x > 1$	$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \to \infty,\ n \to \infty$	[DIVERGENT]
$x = -1$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{om } n \text{ jämnt} \\ 0 & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$	[DIVERGENT]
$x < -1$	Låt $y = -x > 0$. Då är $\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \begin{cases} -\frac{y^{n+1}-1}{y+1} & \text{om } n \text{ jämnt} \\ \frac{y^{n+1}+1}{y+1} & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$	[DIVERGENT]

Eftersom $\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup \{-1\} \cup (-1, 1) \cup \{1\} \cup (1, \infty)$ bevisar detta att $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konv. $= \frac{1}{1-x}$ <u>om och endast om</u> $|x| < 1$. $\square$

Exempel Låt

(a) $s_n = 1+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ (b) $s_n = \left|1+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|$ (c) $s_n = 1+2\sum_{k=1}^{n}|(-1)^k|$

Bestäm om s_n är konvergent då $n \to \infty$ i de tre fallen.

Lösning

(a)
$$\begin{aligned} s_n &= 1+2(-1)^1+2(-1)^2+2(-1)^3+2(-1)^4+\ldots+2(-1)^n \\ &= 1-2+2-2+2-\ldots+2(-1)^n \\ &= \begin{cases} -1 & \text{om } n \text{ udda} \\ 1 & \text{om } n \text{ jämnt} \end{cases} \quad \text{varmed talföljden } (s_n)_{n=0}^{\infty} \text{ är } \underline{\text{divergent}} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} s_n &= |1-2+2-2+2-\ldots+2(-1)^n| \\ &= 1 \quad \text{oavsett om } n \text{ är jämnt eller udda varmed} \\ & \quad\ s_n \text{ är } \underline{\text{konvergent}} \text{ och } \lim_{n\to\infty} s_n = 1. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} s_n &= 1+2\sum_{k=1}^{n}|(-1)^k| \\ &= 1+2\sum_{k=1}^{n}1 \\ &= 1+2n \\ &\to \infty \quad \text{varmed } s_n \text{ är } \underline{\text{divergent}}. \end{aligned}$$

□

Exempel Beräkna serien $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{5+3^{k+2}}{4^{k+1}}$

Lösning $\sum_{k=3}^{\infty}(\frac{5}{4^{k+1}}+\frac{3^{k+2}}{4^{k+1}}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{5}{4^{k+1}}+\sum_{k=3}^{n}\frac{3^{k+2}}{4^{k+1}}\right)$

$\sum_{k=3}^{n}\frac{5}{4^{k+1}} = \frac{5}{4}\sum_{k=3}^{n}(\frac{1}{4})^k = \frac{5}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{4})^k-\sum_{k=0}^{2}(\frac{1}{4})^k\right) \to \frac{5}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16})\right) = \frac{5}{4}(\frac{4}{3}-\frac{21}{16}) = \frac{5}{192}$

$\sum_{k=3}^{n}\frac{3^{k+2}}{4^{k+1}} = \frac{9}{4}\sum_{k=3}^{n}(\frac{3}{4})^k = \frac{9}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}(\frac{3}{4})^k-\sum_{k=0}^{2}(\frac{3}{4})^k\right) \to \frac{9}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}-(1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16})\right) = \frac{9}{4}(4-\frac{37}{16}) = \frac{243}{64}$

Eftersom båda gränsvärdena existerar är gränsvärdet av summan lika med summan av gränsvärdena, dvs

$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{5+3^{k+2}}{4^{k+1}} = \frac{5}{192}+\frac{243}{64} = \frac{734}{192} = \frac{367}{96}.$ □