Lösningar till tentamen i linjär algebra, 5p

Distanskurs
12 januari, 2002 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

1. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A}) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -8 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)(\lambda-1) - 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \end{aligned}$$

dvs egenvärdena är $\lambda = 2 \pm \sqrt{4-(-5)} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$

Egenvektorerna, $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, svarande mot dessa egenvärden är

$\lambda = 5:$ $(5\mathsf{I} - \mathsf{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 8y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$x = 4y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1:$ $(-\mathsf{I} - \mathsf{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x - 8y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$x = -2y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Lös ekvationen $\mathsf{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning

$$\mathsf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & -3-6 \\ 1+2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Därmed kan ekvationen $\mathsf{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ skrivas

$$\begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x - 9y = 5 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 27y = 15 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 9y = 5 \\ -25y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 9y = 5 \\ -5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x - 45y = 25 \\ -45y = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x = -2 \\ -5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1/5 = 0.2 \\ y = -3/5 = -0.6 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

3. Låt B vara matrisen $\begin{bmatrix} c^2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 7c \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Beräkna $\det \mathsf{B}$. (2p)

b) För vilka tal c är B inverterbar? (2p)

Lösning

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad \det \mathsf{B} &= \begin{vmatrix} c^2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 7c \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -3\begin{vmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 7c \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c^2 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 & 7c \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -3\left(-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 7c \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) - \left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 7c \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} c^2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) \\
&= -3\Big(-\frac{1}{2}(4-7c) + \frac{1}{2}(-1-0)\Big) - \Big((-\frac{7}{2}c + \frac{1}{2}) + 2(-c^2+1)\Big) \\
&= 6 - \frac{21}{2}c + \frac{3}{2} + \frac{7}{2}c - \frac{1}{2} + 2c^2 - 2 \\
&= 2c^2 - 7c + 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad \mathsf{B}\text{ inverterbar} &\Leftrightarrow \det \mathsf{B} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 2c^2 - 7c + 5 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow c^2 - \frac{7}{2}c + \frac{5}{2} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow c \neq \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}} = \frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{49-40}}{4} = \frac{7}{4} \pm \frac{3}{4} \\
&\Leftrightarrow c \neq \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2} \text{ och } c \neq \frac{7-3}{4} = 1
\end{aligned}
$$

så B inverterbar för alla reella tal utom 5/2 och 1.

4. Låt π_1 och π_2 vara planen bestämda av
$\pi_1 : x + 2y - z + 2 = 0 \quad$ och $\quad \pi_2 : 2x + 3y + 2z = 0$.
Dessa skär varandra längs en linje med normerad riktningsvektor $\boldsymbol{r}$. Låt $\boldsymbol{u}$ vara en vektor i planet π_1 som är parallell med xz-planet och har längd 2.
a) Beräkna vektorprodukten $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u}$. (3p)
b) Beräkna projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{r}$. (2p)

Lösning

$\pi_1 : x + 2y - z + 2 = 0 \quad \pi_2 : 2x + 3y + 2z = 0$
skär varandra längs linjen ℓ

$$\ell : \left\{ \begin{array}{rcll} x + 2y - z + 2 & = & 0 & (1) \\ 2x + 3y + 2z & = & 0 & (2) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x + 2y - z + 2 & = & 0 & (1) \\ y - 4z + 4 & = & 0 & 2(1) - (2) \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x + 2y + 2 \\ y & = & 4z - 4 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t - 2 \cdot (4t - 4) - 2 \ = \ -7t + 6 \\ y & = & 4t - 4 \\ z & = & t \end{array} \right.$$

så en riktningsvektor är $(-7, 4, 1)$ och den normerade

$$\boldsymbol{r} \ = \ \frac{1}{\sqrt{49 + 16 + 1}}(-7, 4, 1) \ = \ \frac{1}{\sqrt{66}}(-7, 4, 1)$$

Enligt uppgiften är $\boldsymbol{u}$ vektor i π_1, parallell med xz-planet, av längd 2.
En vektor som ligger i π_1 och är parallell med xz-planet, är (även) riktningsvektor för skärningslinjen ℓ_2 mellan π_1 och xz-planet. Dvs

$$\ell_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 2 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & -2 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & t + 2 \end{array} \right.$$

dvs $\boldsymbol{u} = c(1, 0, 1)$ där c konstant så att $|\boldsymbol{u}| = 2$
dvs $c\sqrt{1^2 + 1^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}$.

a)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u} \ &= \ \frac{1}{\sqrt{66}}(-7, 4, 1) \times \sqrt{2}(1, 0, 1) \\ &= \ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{33}} \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= \ \frac{4}{\sqrt{33}}(1, 2, -1) \end{aligned}$$

b) Eftersom $\boldsymbol{r}$ är normerad är $|\boldsymbol{r}| = 1$ och projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{r}$ blir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}' \ &= \ \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2} \boldsymbol{r} \\ &= \ \frac{\sqrt{2}(1, 0, 1) \frac{1}{\sqrt{66}}(-7, 4, 1)}{1^2} \ \frac{1}{\sqrt{66}}(-7, 4, 1) \\ &= \ \frac{\sqrt{2}}{66} \cdot \frac{1 \cdot (-7) + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1}{1} \ (-7, 4, 1) \\ &= \ -\frac{\sqrt{2}}{11} \ (-7, 4, 1) \end{aligned}$$

5. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - \frac{1}{a}y & = & 1 \\ \frac{1}{1-a}x - 2y & = & 1 \end{cases}$ för alla värden på a. (3p)

Lösning

Antag att $a \neq 0$ och $a \neq 1$ (ty annars är ekvationssystemet ej väldefinierat). Då fås lösningen enligt

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{a}y & = & 1 & (1) \\ \frac{1}{1-a}x - 2y & = & 1 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{a}y & = & 1 & (1') = (1) \\ 4(1-a)y - \frac{1}{a}y & = & 1 - 2(1-a) & (2') = (1) - 2(1-a)(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x & = & 1 + \frac{1}{a}y & (1'') = (1') + \frac{1}{a}y \\ \dfrac{4a(1-a) - 1}{a}y & = & 1 - (1-a) & (2'') = (2') \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x & = & \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{a}y) \\ y & = & (1 - 2(1-a)) \cdot \dfrac{a}{4a(1-a) - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{a}y) \\ y & = & (2a-1)\dfrac{a}{(2a-1)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x & = & \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{a}y) \\ y & = & -\frac{a}{2a-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{1-2a}) \\ y & = & \frac{a}{1-2a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2a+1}{1-2a} \\ y & = & \frac{a}{1-2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & \frac{1-a}{1-2a} \\ y & = & \frac{a}{1-2a} \end{cases}$$

om $1 - 2a \neq 0$ dvs om $a \neq \frac{1}{2}$.

Om $a = \frac{1}{2}$ är ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{1/2}y & = & 1 \\ \frac{1}{1-1/2}x - 2y & = & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y & = & 1 \\ 2x - 2y & = & 1 \end{cases}$$

dvs lösningen är $\{(x, y); x = \frac{1}{2}(1 + 2y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

6. Linjen ℓ_1 går genom punkterna $P_1 = (2,0,1)$ och $P_2 = (1,-2,3)$. Linjen ℓ_2 går genom punkten $P_3 = (\alpha, 7, 2)$ och har riktningsvektorn $\boldsymbol{r}_2 = (1,2,3)$.
Bestäm alla värden på α så att ℓ_2 är på avståndet $\frac{1}{\sqrt{5}}$ från ℓ_1. (4p)

Lösning

ℓ_1 går genom $P_1 = (2,0,1)$ och $P_2 = (1,-2,3)$ så riktningen $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (2,0,1) - (1,-2,3) = (1,2,-2)$ dvs

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

ℓ_2 går genom $P_3 = (\alpha, 7, 2)$ med riktning $\boldsymbol{r}_2 = (1,2,3)$ varmed

$$\ell_2 : \begin{cases} x = \alpha + t \\ y = 7 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 ska vara $1/\sqrt{5}$. Då är en vektor (kalla den $\boldsymbol{u}$) från ℓ_1 till ℓ_2, den mellan P_1 och P_3: $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{P_1P_3} = (2-\alpha, -7, -1)$.
Vektorprodukten, $\boldsymbol{n}$, mellan riktningsvektorerna $\boldsymbol{r}_1$ och $\boldsymbol{r}_2$ är ortogonal mot linjerna ℓ_1 och ℓ_2:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \\ &= (1,2,-2) \times (1,2,3) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (10, -5, 0) \\ &= 5(2, -1, 0) \end{aligned}$$

varmed projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{n}$ är

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}' &= \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2} \boldsymbol{n} \\ &= \frac{(2-\alpha, -7, -1) \cdot (2, -1, 0)}{|(2,-1,0)|^2} (2, -1, 0) \\ &= \frac{11 - 2\alpha}{5} (2, -1, 0) \end{aligned}$$

Eftersom längden av vektorn som är ortogonal mot båda linjerna ska vara $1/\sqrt{5}$ kan vi bestämma α:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} &= |\boldsymbol{u}'| \\ &= \left| \frac{11 - 2\alpha}{5} (2, -1, 0) \right| \\ &= \frac{|11 - 2\alpha|}{5} \sqrt{5} \\ &= \frac{|11 - 2\alpha|}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

dvs $|11 - 2\alpha| = 1$ så $11 - 2\alpha =$ antingen -1 eller 1
dvs $\alpha =$ antingen 5 eller 6.

7. Formulera och bevisa Cramers regel i det tredimensionella fallet. (3p)

   Lösning
   (Se boken s. 210−211.)

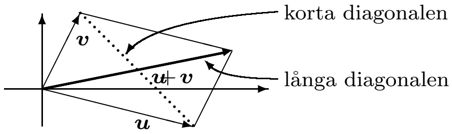
8. Visa att F är en linjär avbildning om och endast om det finns en avbildningsmatris A (d.v.s. om och endast om det finns A sådan att $F(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$). (3p)

   Lösning
   (Se boken s. 166−167.)

9. Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två linjärt oberoende vektorer i planet.
a) Bevisa geometriskt att arean av den triangel som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är lika med arean av den triangel som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. (1p)
b) Bevisa algebraiskt att $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})|$.
(Tips: I en triangel med vinkel α och motstående sida a och vinkel β och motstående sida b gäller sinussatsen: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$.) (3p)

Lösning

a) Geometriskt bevis av att $A(\Delta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = A(\Delta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}))$:



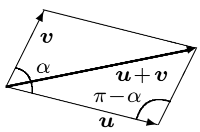
Triangeln som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ delar parallellogrammet mitt itu (om man delar längs den korta diagonalen) varmed triangelarean är hälften av parallellogramarean $|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$.
Triangeln som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ delar också parallelogrammet mitt itu (om man delar längs den långa diagonalen) varmed triangelarean även här är halva parallellogramarean.

b) Algebraiskt bevis av att $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})|$:
Denna uppgift kan lösas på (åtminstone) 2 sätt.
Det första utnyttjar på ett kärnfullt sätt en av de viktiga egenskaperna hos vektorprodukten:

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) \;=\; \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$$

varmed $|\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})| = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$.

Det andra utnyttjar vinklarna i det parallellogram som $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ spänner samt sinussatsen:



Enligt definitionen av vektorprodukt är

$$|\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})| \;=\; |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\sin[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}]$$

I parallellogrammet är vinkelsumman 2π. Om vinkeln $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ är α så är närliggande vinklar $\pi-\alpha$ respektive, och motstående vinkel α. Betrakta nu den nedre triangeln. Enligt sinussatsen är

$$\frac{\sin[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}]}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|}$$

dvs $\sin[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}] \;=\; \dfrac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|}\sin(\pi-\alpha)$. Men $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ så

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})| &= |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\sin[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}] \\
&= |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|}\sin\alpha \\
&= |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\,\sin[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] \\
&= |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|
\end{aligned}$$

(Eftersom arean av parallellogrammet är $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$ är triangelarean $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|/2$ får detta till följd att detta är ett algebraiskt bevis av påstående i a.)