Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs

26 april, 2003 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

1. Lös ekvationssystemet $1^k\alpha + 2^k\beta + 3^k\gamma = k$ där $k = 0, 1, 2$. (3p)

Lösning:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+2\beta+3\gamma &= 1 \\ \alpha+4\beta+9\gamma &= 2 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \beta+2\gamma &= 1 \\ 3\beta+8\gamma &= 2 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \beta+2\gamma &= 1 \\ 2\gamma &= -1 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha &= -3/2 \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= -1/2 \end{cases}$$

□

2. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

$0 = \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3) - 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{5\pm7}{2} = \begin{cases} \lambda_1: & 6 \\ \lambda_2: & -1 \end{cases}$

$\mathsf{A}\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{u}$:

$$\begin{cases} 2u_1 - 3u_2 &= 6u_1 \\ -4u_2 + 3u_2 &= 6u_2 \end{cases} \sim \begin{cases} -4u_1 - 3u_2 &= 0 \\ -4u_1 - 3u_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow u = (3, -4)^T$$

$\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \lambda_2\boldsymbol{v}$:

$$\begin{cases} 2v_1 - 3v_2 &= -v_1 \\ -4v_2 + 3v_2 &= -v_2 \end{cases} \sim \begin{cases} 3v_1 - 3v_2 &= 0 \\ -4v_1 + 4v_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow u = (1, 1)^T$$

Alltså: $\underline{\text{egenvärden } \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -1 \text{ och egenvektorer } \boldsymbol{u} = (3,-4)^T,\ \boldsymbol{v} = (1,1)^T.}$ □

3. För vilka tal c är matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 4 & 0 & c \\ 16 & 8c & 7 \end{bmatrix}$ ej inverterbar? Ange för ett sådant c hur första raden kan skrivas som en linjärkombination av andra och tredje. (3p)

Lösning:

A ej inverterbar omm $\det\mathsf{A} = 0$, dvs omm

$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & c \\ 4 & 0 & c \\ 16 & 8c & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ 8c & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & c \\ 16 & 4 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 16 & 8c \end{vmatrix} = 0 - 8c^2 - 2(28 - 16c) + c(32c - 0) = 24c^2 + 32c - 56$

$\Leftrightarrow \quad 3c^2 + 4c - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 + \frac{4}{3}c - \frac{7}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \quad c = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{21}{9}} = \frac{-2\pm5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -7/3 \end{cases}$

<u>Alltså är A ej inverterbar för $c = 1$ och $c = -7/3$.</u>

Om $c = 1$ är matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

varmed (rad 3) $= (16, 8, 7) = 3 \cdot (4, 0, 1) + 4 \cdot (1, 2, 1) =$ 3(rad 2) + 4(rad 1)

dvs <u>(rad 1) $= -\frac{3}{4}$(rad 2) $+ \frac{1}{4}$(rad 3).</u> □

4. Vilken lösning (x, y, z) till ekvationen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}$ uppfyller villkoret $x + y + z = 1$, där $a \in \mathbb{R}$? (3p)

Lösning:
Den gängse lösningen till en matrisekvation av typen $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ fås som $\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ där A^{-1} är inversen till A. I detta fall innebär detta

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 2 & 1 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

dvs $\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 7 & -3 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ varmed lösningen är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 7 & -3 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} + 3a + \frac{1}{2}a^2 \\ 7 - 3a - a^2 \\ -\frac{5}{2} + a + \frac{1}{2}a^2 \end{bmatrix}$$

Det extra villkoret $x + y + z = 1$ innebär nu att $(-\frac{11}{2} + 3a + \frac{1}{2}a^2) + (7 - 3a - a^2) + (-\frac{5}{2} + a + \frac{1}{2}a^2) = -1 + a = 1$ dvs $a = 2$ varmed lösningen är $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} + 6 + 2 \\ 7 - 6 - 4 \\ -\frac{5}{2} + 2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$. $\square$

5. En linje går genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(4, 5, 3)$. En annan går genom $(-1, -10, -1)$ och $(8, 2, 2)$. Bestäm det kortaste avståndet mellan linjerna. (3p)

Lösning:
För att punkten $(1, 1, 1)$ ska ligga på ℓ_1 måste $\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + \alpha s \\ y = 1 + \beta s \\ z = 1 + \gamma s \end{cases}$ där valet av (α, β, γ) ska ge att $(4, 5, 3)$ också ligger på linjen. Med $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 4, 2)$ har vi att $(4, 5, 3)$ ligger på linjen ℓ_1 då $s = 1$. Alltså är $\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 1 + 4s \\ z = 1 + 2s \end{cases}$.

För $\ell_2 : \begin{cases} x = 8 + \alpha t \\ y = 2 + \beta t \\ z = 2 + \gamma t \end{cases}$ har vi på samma sätt att $(\alpha, \beta, \gamma) = (-3)(3, 4, 1)$ ger att $(-1, -10, -1)$ ligger på linjen ℓ_2 då $t = 1$. Alltså är $\ell_2 : \begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Låt $\boldsymbol{p}_1 = (1 + 3s, 1 + 4s, 1 + 2s)$ och $\boldsymbol{p}_2 = (8 + 3t, 2 + 4t, 2 + t)$.
Då är $\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 = (7 - 3s + 3t, 1 - 4s + 4t, 1 - 2s + t)$ och riktningsvektorer för ℓ_1 respektive ℓ_2: $\boldsymbol{r}_1 = (3, 4, 2)$ respektive $\boldsymbol{r}_2 = (3, 4, 1)$. För kortaste avstånd mellan ℓ_1 och ℓ_2 ska $(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) \cdot \boldsymbol{r}_1 = 0$ och $(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) \cdot \boldsymbol{r}_2 = 0$ dvs

$$\begin{cases} (7 - 3s + 3t)3 + (1 - 4s + 4t)4 + (1 - 2s + t)2 & = & 0 \\ (7 - 3s + 3t)3 + (1 - 4s + 4t)4 + (1 - 2s + t) & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 29s - 27t & = & 27 \\ 27s - 26t & = & 26 \end{cases}$$ varmed

$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 = (4, -3, 0)$ och avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 är $|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\square$

6. Låt $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ vara en ON-bas i planet. Låt $\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{a} & = & \cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{b} & = & \sin\theta\, \boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_2 \end{array} \right.$.

   (a) Visa att $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ är en ON-bas. (2p)

   (b) Punkten P har koordinaterna $(2, -1)$ i basen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.
   Vilka koordinater har P i basen $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$? (2p)

Lösning:

(a) Ortogonal: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (\sin\theta, -\cos\theta) = \cos\theta \sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$

Normerad: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = (\sin\theta, -\cos\theta) \cdot (\sin\theta, -\cos\theta) \sin^2\theta + (-\cos\theta)^2 = 1$

(b) Antag att P har koordinaterna (α, β) i basen $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Då är
$P = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \alpha(\cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_2) + \beta(\sin\theta\, \boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_2) =$
$= (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + (\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta & = & 2 & (1) \\ \alpha\sin\theta - \beta\sin\theta & = & -1 & (2) \end{array} \right.$$

$(1)\sin\theta - (2)\cos\theta : \beta\sin^2\theta + \beta\cos^2\theta = 2\sin\theta + \cos\theta$
$(1)\cos\theta + (2)\sin\theta : \alpha\cos^2\theta + \alpha\sin^2\theta = 2\cos\theta - \sin\theta$
varmed koordinaterna för P är
$(\alpha, \beta) = \underline{(2\cos\theta - \sin\theta\ ,\ 2\sin\theta + \cos\theta)}$ i basen $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. □

7. Visa att om $F : K \to M$ och $G : M \to N$ är linjära avbildningar med avbildningsmatriser A resp. B så har $G \circ F$ avbildningsmatrisen BA. (3p)

Lösning:

(se Sparr, s. 180−181.) □

8. Antag att linjerna ℓ_1 och ℓ_2 ges av $\ell_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + s \\ y = s \\ z = 1 \end{array} \right.$ och $\ell_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 + at \\ z = 3 + 2t \end{array} \right.$

   Bestäm talet a så att vinkeln mellan riktningsvektorerna för ℓ_1 och ℓ_2 blir

   (a) $\pi/2$. (1p)

   (b) $\pi/3$. (2p)

Lösning:

(a) Att vinkeln mellan ℓ_1 och ℓ_2 är $\frac{\pi}{2}$ innebär att riktningsvektorerna är ortogonala:
$\boldsymbol{r}_1 = (1, 1, 0)$ och $\boldsymbol{r}_2 = (-1, a, 2)$ så $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = 0 \Leftrightarrow -1 + a = 0 \Leftrightarrow \underline{a = 1.}$

(b) Skalärprodukt: $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2| \cos[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ varmed $\cos[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2] = \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|}$.
För att vinkeln mellan linjerna ska vara $\frac{\pi}{3}$ ska alltså
$\frac{1}{2} = \frac{(1,1,0)\cdot(-1,a,2)}{|(1,1,0)||(-1,a,2)|}$ dvs $\frac{1}{4} = \frac{(-1+a+0)^2}{(1+1)(1+a^2+4)}$ dvs $2(5 + a^2) = 4(1 - 2a + a^2)$ dvs
$2a^2 - 8a - 6 = 0$ dvs $a^2 - 4a - 3$ dvs $a = 2 \pm \sqrt{4 + 3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{a_1 = 2 + \sqrt{7} \text{ eller } a_2 = 2 - \sqrt{7}}.$

Vektorprodukt: $|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2| = |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2| \sin[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ varmed $\sin[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2] = \frac{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|}$.
För att vinkeln mellan linjerna ska vara $\frac{\pi}{3}$ ska alltså
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|(2-0,-2+0,a+1)|}{|(1,1,0)||(-1,a,2)|}$ dvs $\frac{3}{4} = \frac{4+4+(a+1)^2}{2(5+a^2)}$ dvs $6(5 + a^2) = 4(9 + 2a + a^2)$ dvs
$2a^2 - 8a - 6 = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 2 + \sqrt{7} \text{ eller } a_2 = 2 - \sqrt{7}}.$ □

9. Antag att $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \theta & 1-\theta \\ \sqrt{\theta} & 1-\sqrt{\theta} \end{bmatrix}$.

(a) För vilka θ är $\det(\mathsf{A}) < 0$? (1p)

(b) Låt $a_{ij,k}$ beteckna matriselementet på rad i kolonn j i matrisen A^k.
Bevisa att $\theta = \frac{1}{4}, k \geq 3 \;\Rightarrow\; 0 < a_{ij,k} < \frac{5}{8}$. (4p)

Lösning:

(a) $\det(\mathsf{A}) = \theta(1-\sqrt{\theta}) - (1-\theta)\sqrt{\theta} = \theta - \sqrt{\theta} = \sqrt{\theta}(1-\sqrt{\theta}) < 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq \theta < 1$

(b) $\theta = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. För att bevisa att elementen i matrisen A^k ligger i intervallet $(0, \frac{5}{8})$ då $k \geq 3$ vill vi beräkna dessa matriselement uttryck med k. Detta kan göras med hjälp av diagonalisering vilket börjar med beräkning av egenvärden och egenvektorer.

$\det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = (\lambda - \frac{1}{4})(\lambda - \frac{1}{2}) - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow$

$\lambda = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{3\pm5}{8} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -\frac{1}{4},\ \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = -\frac{1}{4} : (\mathsf{A} - \lambda_1\mathsf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{3}{4}x + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})y = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}_1 = (1, -1)^T$.

$\lambda_2 = 1 : (\mathsf{A} - \lambda_1\mathsf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (\frac{1}{4} - 1)x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{3}{4}x + (\frac{1}{2} - 1)y = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}_2 = (2, 3)^T$.

Detta innebär att A kan skrivas som SDS^{-1} där $\mathsf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (matrisen av egenvektorerna som kolonnvektorer), $\mathsf{S}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (diagonalmatrisen med egenvärdena i diagonalen). Dessutom kan nu A^k beräknas!

$\mathsf{A}^k = \mathsf{SD}^k\mathsf{S}^{-1}$ där $\mathsf{D}^k = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{4})^k & 0 \\ 0 & 1^k \end{bmatrix}$ varmed

$\mathsf{A}^k = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-\frac{1}{4})^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} (-4)^{-k} & 2 \\ -(-4)^{-k} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3(-4)^{-k} + 2 & -2(-4)^{-k} + 2 \\ -3(-4)^{-k} + 3 & 2(-4)^{-k} + 3 \end{bmatrix}$. Antag nu att $k \geq 3$. Då är

$a_{11,k} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5(-4)^k} \leq \frac{2}{5} + \frac{3}{5\cdot4^4} < \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

$a_{12,k} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5(-4)^k} \leq \frac{2}{5} + \frac{2}{5\cdot64} < \frac{2}{5} + \frac{2}{4\cdot64} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

$a_{21,k} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5(-4)^k} \leq \frac{3}{5} + \frac{3}{5\cdot4^3} = \frac{3\cdot64+3}{5\cdot64} = \frac{195}{320} < \frac{5}{8}$ ty $1560 = 195\cdot8 < 5\cdot320 = 1600$.

$a_{22,k} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5(-4)^k} < \frac{3}{5} + \frac{2}{5\cdot4^4} < \frac{5}{8}$.

Dessutom är $a_{ij,k} > 0$ ty $\frac{2}{5} > \frac{3}{5\cdot4^k}$ då $k \geq 3$.

Därmed är det klart att $\theta = \frac{1}{4}$ och $k \geq 3$ implicerar att $0 < a_{ij,k} < \frac{5}{8}$. $\square$