Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
11 januari, 2003 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

1. Lös ekvationen $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ med avseende på $\boldsymbol{x}$ där

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad (4p)$$

Lösning: $\boldsymbol{x} = (\mathsf{A}^2)^{-1}\boldsymbol{y} = (\mathsf{A}^{-1})^2\boldsymbol{y}$ där

$$\mathsf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1-2-6 & 2+4+9 & 3+2+6 \\ -1-2-2 & -2+4+3 & -3+2+2 \\ -2-3-4 & -4+6+6 & -6+3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 15 & 11 \\ -5 & 5 & 1 \\ -9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

så

$$(\mathsf{A}^2)^{-1} : \left[\begin{array}{rrr|rrr} -7 & 15 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} -7 & 15 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 48 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 9 & -5 \end{array}\right] \sim \ldots$$

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 16 & 0 & 0 & -3 & 73 & -40 \\ 0 & 16 & 0 & -4 & 92 & -48 \\ 0 & 0 & 16 & 5 & -79 & 40 \end{array}\right]$$

och

$$\mathsf{A}^{-1} : \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -7 & 4 \end{array}\right]$$

så

$$(\mathsf{A}^{-1})^2 = \frac{1}{4^2}\begin{bmatrix} 1-4 & 5+40+28 & -4-20-16 \\ -4 & 64+28 & -32-16 \\ 1+4 & 5-56-28 & -4+28+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -3 & 73 & -40 \\ -4 & 92 & -48 \\ 5 & -79 & 40 \end{bmatrix}$$

Oavsett vilket av dessa två alternativ man väljer blir svaret

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -3 & 73 & -40 \\ -4 & 92 & -48 \\ 5 & -79 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ -13 \end{bmatrix}$$

□

2. Låt linjerna ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 vara definierade av
$\ell_1 : x + 2y = 1 \qquad \ell_2 : 2x - y = 1 \qquad \ell_3 : 3x + y = 1.$
Beräkna tyngdpunkten i den triangel som begränsas av ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. (3p)

Lösning: Triangeln har sina hörn i skärningspunkterna mellan ℓ_1, ℓ_2, mellan ℓ_2, ℓ_3 och mellan ℓ_3, ℓ_1. Dessa är i tur och ordning:

$$\begin{aligned}
\ell_1 = \ell_2 :&\ \tfrac{1}{2}(1-x) = 2x - 1 \ \Rightarrow\ x = \tfrac{3}{5} \ \Rightarrow\ y = \tfrac{1}{5} \\
\ell_2 = \ell_3 :&\ 2x - 1 = 1 - 3x \ \Rightarrow\ x = \tfrac{2}{5} \ \Rightarrow\ y = -\tfrac{1}{5} \\
\ell_3 = \ell_1 :&\ 1 - 3x = \tfrac{1}{2}(1-x) \ \Rightarrow\ x = \tfrac{1}{5} \ \Rightarrow\ y = \tfrac{2}{5}
\end{aligned}$$

Enligt tyngdpunktsformeln är därmed
$T = \frac{1}{3}\Big((\frac{3}{5}, \frac{1}{5}) + (\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}) + (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})\Big) = \underline{(\frac{2}{5}, \frac{2}{15})}$ □

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1^2x + 2^2y + 3^2z = 4^2 \\ 2^2x + 3^2y + 4^2z = 5^2 \\ 3^2x + 4^2y + 5^2z = 6^2 \end{cases}$$

(3p)

Lösning: M.h.a. Gausselimination är

$$\begin{cases} x + 4y + 9z = 16 \\ 4x + 9y + 16z = 25 \\ 9x + 16y + 25z = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y + 9z = 16 \\ \quad 7y + 20z = 39 \\ \quad 20y + 56z = 108 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 4y + 9z = 16 \\ \quad 7y + 20z = 39 \\ \quad\quad 8z = 24 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y = -11 \\ \quad 7y = -21 \\ \quad\quad z = 3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{(x, y, z) = (1, -3, 3)}$$ □

4. Låt $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Beräkna egenvärden λ_1, λ_2 och egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ för A. (2p)
   (b) Beräkna $\mathsf{A}^{2003}\boldsymbol{v}$ där $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor som svarar mot det negativa egenvärdet. (2p)

Lösning:
(a) $\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(1-\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{9+7} \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 7.$

$$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5v_1' + 4v_1'' = -v_1' \\ 3v_1' + v_1'' = -v_1'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6v_1' + 4v_1'' = 0 \\ 3v_1' + 2v_1'' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ alla multipler av $[2 \ \ -3]^T$ duger som egenvektorn $\boldsymbol{v}_1$.

$$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5v_2' + 4v_2'' = 7v_2' \\ 3v_2' + v_2'' = 7v_2'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2v_2' + 4v_2'' = 0 \\ 3v_2' - 6v_2'' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ alla multipler av $[2 \ \ 1]^T$ duger som egenvektorn $\boldsymbol{v}_2$.

(b) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 = [2 \quad -3]^T$ är en egenvektor som svarar mot det negativa egenvärdet $\lambda_1 = -1$ och enligt definitionen av egenvektor är $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ varmed $\mathsf{A}^{2003}\boldsymbol{v}_1 = \mathsf{A}^{2002}(\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1) = \mathsf{A}^{2002}(-1)\boldsymbol{v}_1 = (-1)\mathsf{A}^{2002}\boldsymbol{v}_1 = (-1)\mathsf{A}^{2001}(\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1) =$ $= (-1)\mathsf{A}^{2001}(-1)\boldsymbol{v}_1 = (-1)^2\mathsf{A}^{2001}\boldsymbol{v}_1 = \ldots = (-1)^{2002}\mathsf{A}^1\boldsymbol{v}_1 = (-1)^{2003}\boldsymbol{v}_1 =$ $= (-1)\boldsymbol{v}_1 = [-2 \quad 3]^T$ □

Eftersom alla multipler av $[2 \quad -3]^T$ är egenvektorer som svarar mot det negativa egenvärdet -1, så är alla multipler av $[-2 \quad 3]^T$ (t.ex. $[2 \quad -3]^T$) korrekt svar här.

5. Antag att $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 + \alpha\boldsymbol{e}_2$ och att $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ m.a.p. basen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. För vilka reella α har $\boldsymbol{u}$, m.a.p. basen $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$, längden $2\sqrt{2}$? (3p)

Lösning: Skrivet med basbytesmatris har vi att

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \begin{cases} u'_1 + u'_2 &= 1 \\ u'_1 + \alpha u'_2 &= 2 \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} u'_1 + u'_2 &= 1 \\ (\alpha-1)u'_2 &= 1 \end{cases}$$

$$\sim \quad \begin{cases} u'_1 + u'_2 &= 1 \\ u'_2 &= 1/(\alpha-1) \quad (\text{obs! } \alpha \neq 1) \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} u'_1 &= (\alpha-2)/(\alpha-1) \\ u'_2 &= 1/(\alpha-1) \end{cases}$$

varmed

$$|\boldsymbol{u}'| = \sqrt{\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2-4\alpha+5}{(\alpha-1)^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Kvadrering av båda led ger att $\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 8(\alpha^2 - 2\alpha + 1)$
$7\alpha^2 - 12\alpha + 3 = 0$
$\alpha^2 - \frac{12}{7}\alpha + \frac{3}{7}\alpha = 0$
$\alpha = \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36}{49} - \frac{3}{7}} = \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36-21}{49}}$
$\alpha = \frac{1}{7}(6 \pm \sqrt{15})$
$\underline{\alpha = \frac{1}{7}(6 - \sqrt{15}) \text{ eller } \alpha = \frac{1}{7}(6 + \sqrt{15}).}$ □

6. Vektorn $(3, 2, 1)$ projiceras ortogonalt på planet $x + 2y + 3z = 0$. Beräkna längden av projektionen. (4p)

Lösning: Vektorn: $\boldsymbol{u} = (3, 2, 1)$
Planet: $\pi : x + 2y + 3z = 0$
Normalen till planet: $\boldsymbol{n} = (1, 2, 3)$
Projektionen av $\boldsymbol{u}$ på π: $\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{n}$ där a är så stort att vektorn ligger i π.

$\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{n} = (3 - a, 2 - 2a, 1 - 3a)$.
För att ligga i π måste alltså detta uttryck satisfiera planets ekvation, dvs
$(3 - a) + 2(2 - 2a) + 3(1 - 3a) = 0$
$10 - 14a = 0 \Rightarrow a = 5/7$.
Längden av projektionen blir då

$$|\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{n}| = \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2 + (1-3a)^2} =$$

$$= \sqrt{(\tfrac{16}{7})^2 + (\tfrac{4}{7})^2 + (-\tfrac{8}{7})^2} = \frac{\sqrt{3 \cdot 16 \cdot 7}}{7} = \underline{4\sqrt{\frac{3}{7}}}.$$ □

7. Formulera och bevisa produktregeln för determinanter. (4p)

Lösning: (Se boken s. 203)

8. Antag att A är en inverterbar matris.
Visa att $\det((\mathsf{A}^n)^{-1}) = (\det(\mathsf{A}))^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. (3p)

Lösning: $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} \Rightarrow \det(\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}) \overset{(*)}{=} \det(\mathsf{A}^{-1})\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{I}) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \det(\mathsf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{A})^{-1} \quad (**)$

där $(*)$ gäller enl. produktregeln!
Därmed är, med upprepad användning av produktregeln,

$$\det((\mathsf{A}^n)^{-1}) \overset{(**)}{=} (\det(\mathsf{A}^n))^{-1} = \Big(\det(\mathsf{A}\cdot\mathsf{A}\cdot\mathsf{A}\cdots\mathsf{A})\Big)^{-1} =$$
$$= \Big(\det\mathsf{A}\det\mathsf{A}\det\mathsf{A}\cdots\det\mathsf{A}\Big)^{-1} = \Big((\det\mathsf{A})^n\Big)^{-1} = (\det\mathsf{A})^{-n}. \qquad \square$$

9. Antag att A är en symmetrisk ortogonal matris och låt $\mathsf{A}^0 := \mathsf{I}$.
Visa att $(\mathsf{A}+\mathsf{I})^{100} = 2^{99}(\mathsf{A}+\mathsf{I})$. (Tips: $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$, $n \in \mathbb{N}$.) (3p)

Lösning: Att A är symmetrisk och ortogonal innebär att $\mathsf{A} = \mathsf{A}^T = \mathsf{A}^{-1}$. Enligt binomialsatsen och genom att utnyttja symmetri och ortogonalitet har vi att

$$\begin{aligned}
(\mathsf{A}+\mathsf{I})^{100} &= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\mathsf{A}^{100-k}\,\mathsf{I}^k \\
&= \binom{100}{0}\mathsf{A}^{100} + \binom{100}{1}\mathsf{A}^{99} + \ldots + \binom{100}{99}\mathsf{A}^1 + \binom{100}{100}\mathsf{A}^0 \\
&= \binom{100}{0}(\mathsf{A}^{-1})^{50}\mathsf{A}^{50} + \binom{100}{1}(\mathsf{A}^{-1})^{49}\mathsf{A}^{49}\mathsf{A} + \ldots + \binom{100}{99}\mathsf{A} + \binom{100}{100}\mathsf{I} \\
&= \binom{100}{0}\mathsf{I} + \binom{100}{1}\mathsf{A} + \ldots + \binom{100}{99}\mathsf{A} + \binom{100}{100}\mathsf{I} \\
&= \mathsf{I}\sum_{k=0}^{50}\binom{100}{2k} + \mathsf{A}\sum_{k=0}^{49}\binom{100}{2k+1}
\end{aligned}$$

Eftersom $2^{100} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k} = \sum_{k=0}^{50}\binom{100}{2k} + \sum_{k=0}^{49}\binom{100}{2k+1}$ och, enligt tipset, $\sum_{k=0}^{50}\binom{100}{2k} = \sum_{k=0}^{49}\binom{100}{2k+1}$ så är $\sum_{k=0}^{50}\binom{100}{2k} = \sum_{k=0}^{49}\binom{100}{2k+1} = \frac{1}{2}\,2^{100} = 2^{99}$
varmed $(\mathsf{A}+\mathsf{I})^{100} = \mathsf{I}\,2^{99} + \mathsf{A}\,2^{99} = 2^{99}(\mathsf{A}+\mathsf{I})$. $\square$