Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
19 mars, 2005 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad.

1. Bevisa att om $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ så är $\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v}$ den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$. (3p)

   Lösning: (Se Sparr, s. 65–66.) $\square$

2. Bevisa att om A är en matris med egenvärdet λ så har A^n egenvärdet λ^n. (3p)

   Lösning: (Se Sparr, s. 240–241.) $\square$

3. Låt $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$ och $p_5 = 13$ (de första 6 primtalen).
   Lös ekvationssystemet $p_k x + p_{k+1} y + p_{k+2} z = p_{k+3}$ då $k = 0, 1, 2$. (3p)

   Lösning:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+3y+5z &=& 7 & (1)\\ 3x+5y+7z &=& 11 & (2)\\ 5x+7y+11z &=& 13 & (3)\end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcll} 6x+9y+15z &=& 21 & (1')=3(1)\\ 6x+10y+14z &=& 22 & (2')=2(2)\\ 5x+7y+11z &=& 13 & (3')=(3)\end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcll} y-z &=& 1 & (1'')=(2')-(1')\\ 30x+50y+70z &=& 110 & (2'')=5(2')\\ 30x+42y+66z &=& 78 & (3'')=6(3')\end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcll} 2x+3y+5z &=& 7 & (1''')=(1)\\ y-z &=& 1 & (2''')=(1'')\\ 8y+4z &=& 32 & (3''')=(2'')-(3'')\end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcll} 2x+3y+5z &=& 7 & (1'''')=(1''')\\ y-z &=& 1 & (2'''')=(2''')\\ 2y+z &=& 8 & (3'''')=\frac{1}{4}(3''')\end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcll} 2x+3y+5z &=& 7 & \\ y-z &=& 1 & \\ 3y &=& 9 & (3''''')=(2'''')+(3'''')\end{array}\right.$$

   $\Rightarrow\ y = 9/3 = 3\ \Rightarrow\ z = y - 1 = 2\ \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}(7 - 3y - 5z) = -12/2 = -6.$
   Alltså är $x = -6$, $y = 3$ och $z = 2$. $\square$

4. För den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gäller att $F(\boldsymbol{u}) = (1,2)$ och $F(\boldsymbol{v}) = (2,-1)$. Beräkna $F(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})$. (3p)

   Lösning: Enligt definitionen av linjär avbildning är F linjär om
   $F(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}) = aF(\boldsymbol{u}) + bF(\boldsymbol{v})$ för alla $a, b \in \mathbb{R}$ och $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ som F är definierad för.
   Därmed är $F(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{u}) + 2F(\boldsymbol{v}) = (1,2) + 2(2,-1) = (5,0)$. $\square$

5. Bestäm alla tal a sådana att $|(a,1,1)\times(2,1,-1)| = \frac{5}{\sqrt{2}}$. (3p)

Lösning: $(a,1,1)\times(2,1,-1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) =$
$= (-1-1, -(-a-2), a-2) = (-2, a+2, a-2)$.
$|(a,1,1)\times(2,1,-1)| = \sqrt{(-2)^2+(a+2)^2+(a-2)^2} =$
$= \sqrt{4+a^2+2a+4+a^2-2a+4} = \sqrt{12+2a^2}$.
Kvadrering av båda (positiva) led ger ekvationen
$12+2a^2 = \frac{5^2}{2}$
$a^2 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}$
dvs $a_1 = -\frac{1}{2}$ och $a_2 = \frac{1}{2}$. □

6. Lös matrisekvationen $A^2X + A = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, X är en matris av obekanta och 0 är nollmatrisen. (3p)

Lösning: Under förutsättningen att A^{-1} existerar har vi
$A^2X + A = 0 \Leftrightarrow A(AX+I) = 0 \Leftrightarrow A^{-1}A(AX+I) = A^{-1}0 \Leftrightarrow AX + I = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AX = -I \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-I) \Leftrightarrow X = -A^{-1}$. Så då återstår bara en invertering:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

Svar: $X = -\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. □

7. Linjen ℓ_1 går genom punkten $P_1 = (2,-1,3)$ och har riktningsvektor $\boldsymbol{r}_1 = (1,2,3)$. Linjen ℓ_2 går genom punkten $P_2 = (1,3,1)$ och har riktningsvektor $\boldsymbol{r}_2 = (2,-1,1)$. Beräkna minsta avståndet mellan linjerna. (3p)

Lösning: $\ell_1 : \begin{cases} x = 2+s \\ y = -1+2s \\ z = 3+3s \end{cases} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = 1+t \end{cases}$

$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = (1,2,3)\times(2,-1,1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (5,5,-5)$ så

välj $\boldsymbol{v} = (1, 1, -1)$ som normal till det plan som spänns av $\boldsymbol{r}_1$ och $\boldsymbol{r}_2$.
En sträcka mellan ℓ_1 och ℓ_2 är $\boldsymbol{u} = P_1 - P_2 = (2, -1, 3) - (1, 3, 1) = (1, -4, 2)$.
Kortaste sträckan mellan ℓ_1 och ℓ_2 är längden av projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$:

$$\frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{|(1, -4, 2) \cdot (1, 1, -1)|}{|(1, 1, -1)|} = \frac{|1 - 4 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \qquad \square$$

8. En triangel har hörnen $P_1 = (3, -1, -1)$, $P_2 = (2, -1, 1)$, P_3 och sin tyngdpunkt i $T = (1, 2, 3)$.
   (a) Beräkna P_3. (3p)
   (b) Hur stor är triangelns area? (2p)

Lösning:

(a) $T = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3) \;\Rightarrow\; P_3 = 3(1, 2, 3) - (3, -1, -1) - (2, -1, 1) = (-2, 8, 9)$

(b) $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (3, -1, -1) - (2, -1, 1) = (1, 0, -2)$
$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (3, -1, -1) - (-2, 8, 9) = (5, -9, -10)$
Eftersom $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ är arean av det parallellogram som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, så är triangelarean halva parallellogramarean, dvs

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| &= \tfrac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -9 & -10 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}\right)\right| \\
&= \tfrac{1}{2}|(-18, 0, -9)| \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 \cdot 9)^2 + 9^2} \\
&= \tfrac{9}{2}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$\square$

9. Låt $\boldsymbol{u} = \left(0, \frac{10}{2\sqrt{n}}, \frac{20}{3\sqrt{n}}, \frac{30}{4\sqrt{n}}, \ldots, \frac{10(n-1)}{n\sqrt{n}}\right)$ och $\boldsymbol{v} = (2, 4, 6, 8, \ldots, 2n)$.
Bestäm det antal dimensioner $n \in \mathbb{Z}^+$ sådant att $2\,\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 3\sqrt{5}\,|\boldsymbol{v}|$. (4p)
Tips: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Lösning: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 + \frac{10}{2\sqrt{n}} \cdot 4 + \frac{20}{3\sqrt{n}} \cdot 6 + \frac{30}{4\sqrt{n}} \cdot 8 + \ldots + \frac{10(n-1)}{n\sqrt{n}} \cdot 2n = \sum_{k=2}^{n} \frac{10(k-1)}{k\sqrt{n}} \cdot 2k =$
$= \frac{10}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n}(k-1) = \frac{10}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{10}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 5\sqrt{n}\,(n-1)$.
$|\boldsymbol{v}| = |2(1, 2, 3, \ldots, n)| = 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} = 2\sqrt{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} = \sqrt{\frac{2}{3}n(2n^2 + 3n + 1)}$.
$2\,\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 3\sqrt{5}\,|\boldsymbol{v}| \;\Rightarrow\; 4(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 = 9 \cdot 5|\boldsymbol{u}|^2$ dvs $4 \cdot 25n(n-1)^2 = 45\frac{2n}{3}(2n^2 + 3n + 1)$.
Eftersom $n > 0$ kan vi exkludera den “falska roten” $n_1 = 0$ varmed
$100(n^2 - 2n + 1) = 30(2n^2 + 3n + 1) \;\Leftrightarrow\; n^2 - \frac{29}{4}n + \frac{7}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; n = \frac{29}{8} \pm \sqrt{\frac{841}{64} - \frac{7 \cdot 16}{64}} =$
$= \frac{29}{8} \pm \sqrt{\frac{729}{64}} = \frac{29 \pm 27}{8} = \begin{cases} 7 \\ 0.25 \end{cases}$. Eftersom $n \in \mathbb{Z}^+$ är $n = 7$ enda lösningen. $\square$