Satser och bevis för Distanskurs i Linjär algebra, 5 p

Man skall kunna formulera och bevisa följande satser:

- **Lemma 1** [s. 28, se även föreläsn.ant.]
  Antag att $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$ på linjen.
  Då gäller att $\forall\, \boldsymbol{u}$ på linjen $\exists!\, x \in \mathbb{R} : \boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}$.

- **Sats 2** [s. 29]
  Om $\boldsymbol{e}_1 \not\parallel \boldsymbol{e}_2$ så gäller
  $\forall\, \boldsymbol{u}$ i planet $\exists!\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$.

- **Sats 1** *Projektionsformeln* [s. 65–66]
  Om $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$
  så är den ortogonala projektionen, av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$, skalären $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|^2$ multiplicerat med $\boldsymbol{v}$.

- **Sats 4** [s. 71–72]
  Om $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ON-bas
  $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$
  så är koordinaterna $x_k = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_k \quad k = 1, 2, 3$

- **Sats 4** (*iii*) inkl. **Lemma 2** [s. 87–88, se även föreläsn.ant.]
  $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}$

- **Sats 2** (*iv*) [s. 124]
  $(\mathsf{AB})^T \;=\; \mathsf{B}^T\mathsf{A}^T$

- **Sats 1** [s. 166–167]
  (*i*) F linjär $\Leftrightarrow$ $\exists$ matris $A : F(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$
  (*ii*) Kolonnerna i A är $F(\boldsymbol{e}_1), \ldots, F(\boldsymbol{e}_n)$

- **Sats 4** [s. 180–181]
  Om $F : K \to M$ och $G : M \to N$ är linjära avbildningar med avbildningsmatriser A resp. B så har $G \circ F$ avbildningsmatrisen BA.

- **Sats 4** *Produktregeln* [s. 203]
  $\det \mathsf{AB} \;=\; \det \mathsf{A} \cdot \det \mathsf{B}$

- **Sats 5** [s. 204]
  (*i*) A inverterbar $\Rightarrow$ $\det \mathsf{A} \neq 0$ och $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
  (*ii*) A ortogonal $\Rightarrow$ $\det \mathsf{A}$ är antingen 1 eller -1.

- **Sats 8** *Cramérs regel* (i 3×3-fallet) [s. 210−211]
  Antag att A är en 3×3-matris och att $\det \mathsf{A} \neq 0$.
  Då har ekvationen $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ den entydiga lösningen

$$x_1 = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

- **Lemma 1** [s. 240−241]
  Om A har egenvektorn X med egenvärdet λ
  så *(i)* har $c\,\mathsf{A}$ egenvektorn X med egenvärdet $c\lambda$,
  (ii) har $\mathsf{A} + d\,\mathsf{I}$ egenvektorn X med egenvärdet $\lambda + d$,
  (iii) har A^n egenvektorn X med egenvärdet λ^n.