© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 10: Egenvärden och egenvektorer

Lösningar till problem i linjär algebra utmynnar ofta i s.k. *egenvärdesproblem.* Egenvärden[1] och egenvektorer sammanfattar matrisproblemens mest fundamentala egenskaper. Vi hinner inte med så många resultat i denna kurs men detta är en inledning till en djupare förståelse som kan fås så småningom genom mer avancerade kurser i algebra och övrig matematik.

Exempel 1 och 2 handlar om hur man m.h.a. lämpligt val av bas kan beskriva projektion resp. spegling m.h.a. en avbildningsmatris som är diagonalmatris. I Exempel 3 förklaras hur den asymptotiska lösningen till en rekursionsformel fås genom en jämviktsekvation. Det är just om sådan *jämvikt* som egenvärden handlar!

Om $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ där A är en kvadratisk matris, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ är en kolonnvektor och λ är en skalär, så kallas λ egenvärde och $\boldsymbol{x}$ egenvektor till A.

[**Obs** λ egenvärde till $\mathsf{A} \Leftrightarrow \det(\lambda\mathsf{I} - \mathsf{A}) = 0$

Denna observation är redskapet för beräkningen av egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ för en given $n \times n$-matris. Har man väl fått reda på egenvärdena kan egenvektorerna, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, bestämmas genom att lösa de linjära ekvationssystem som fås då egenvärdena sätts in:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}\boldsymbol{x}_1 &= \lambda_1\boldsymbol{x}_1 \text{ löses m.a.p. } \boldsymbol{x}_1 \\
\mathsf{A}\boldsymbol{x}_2 &= \lambda_2\boldsymbol{x}_2 \text{ löses m.a.p. } \boldsymbol{x}_2 \\
&\vdots \\
\mathsf{A}\boldsymbol{x}_n &= \lambda_n\boldsymbol{x}_n \text{ löses m.a.p. } \boldsymbol{x}_n
\end{aligned}$$

(Observera att var och en av dessa rader ger upphov till var sitt ekvationssystem.)

[1] Ordet "egenvärde" har en skojig etymologi: olikt många andra begrepp inom matematiken härstammar inte ordet från engelskan, utan tyskans *Eigenwerte.* Så trots att engelskan är matematikens officiella språk heter egenvärde fortfarande *Eigenwerte* eller (vanligare) hybriden *eigenvalue* i engelska böcker, i matematikprogram, på internationella matematikkonferenser osv.

Exempel Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösning

$$\begin{aligned}
0 &= \det(\lambda\,\mathsf{I} - \mathsf{A}) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda-1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)((\lambda-1)^2-1) + (-\lambda+1-1) - (1+\lambda-1) \\
&= (\lambda-3)(\lambda^2-2\lambda+1-1) - 2\lambda \\
&= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 2\lambda \\
&= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda
\end{aligned}$$

Vi ser att eftersom alla termer innehåller λ är $\lambda_1 = 0$ en rot. Därmed återstår att lösa

$$0 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

som har lösningarna $\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$ dvs $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 4$.

Egenvektorerna $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ blir nu (med $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$):

$\boldsymbol{x}_1$: $\mathsf{A}\boldsymbol{x}_1 - 0 \cdot \boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 0 \\ y & = & t \\ z & = & -t \end{array}\right.$$

$\boldsymbol{x}_2$: $\mathsf{A}\boldsymbol{x}_2 - 1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} (3-1)x & +y & +z & = & 0 \\ x & +(1-1)y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(1-1)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & +z & = & 0 \\ x & & +z & = & 0 \\ x & +y & & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & +z & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \\ & -y & +z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} x & = & t \\ y & = & -t \\ z & = & -t \end{array}\right.$$

$\boldsymbol{x}_3$: $\mathsf{A}\boldsymbol{x}_3 - 4 \cdot \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} (3-4)x & +y & +z & = & 0 \\ x & +(1-4)y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(1-4)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +y & +z & = & 0 \\ x & -3y & +z & = & 0 \\ x & +y & -3z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +y & +z & = & 0 \\ & -2y & +2z & = & 0 \\ & 2y & -2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right.$$

så egenvärdena är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 4$
och egenvektorerna är $\boldsymbol{x}_1 = (0, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, -1, -1)^T$ och $\boldsymbol{x}_3 = (2, 1, 1)^T$. $\square$

Lemma 1
Om A har egenvektorn $\boldsymbol{x}$ med egenvärdet λ
så
(i) har $c\mathsf{A}$ egenvektorn $\boldsymbol{x}$ med egenvärdet $c\lambda$,
(ii) har $\mathsf{A}+d\mathsf{I}$ egenvektorn $\boldsymbol{x}$ med egenvärdet $\lambda+d$,
(iii) har A^n egenvektorn $\boldsymbol{x}$ med egenvärdet λ^n.

Läs beviset!

Exempel Ett egenvärde till matrisen $\mathsf{A}=\begin{bmatrix}36 & 0 & 1\\ 0 & 38 & 1\\ 1 & 0 & 35\end{bmatrix}$ är 38.
Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen A^2.

Lösning
Låt oss börja med att titta på egenvärdena till matrisen $\mathsf{B}=\mathsf{A}-35\,\mathsf{I}$:

$$0 \;=\; \det(\lambda\,\mathsf{I}-\mathsf{B}) \;=\; \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-3 & -1\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix} \;=\; \lambda^3-4\lambda^2+2\lambda+3$$

Enl. Lemma 1 och tipset i uppgiften vet vi att $\lambda=38-35=3$ är ett nollställe till det karakteristiska polynomet för B. Så, efter en polynomdivision med $\lambda-3$, har vi andragradaren $\lambda^2-\lambda-1=0$ med lösningarna $\lambda=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ och $\lambda=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Detta innebär att $35+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})=\frac{1}{2}(71-\sqrt{5})$ och $35+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=\frac{1}{2}(71+\sqrt{5})$ är de andra två egenvärdena till A. Därmed är egenvärdena till A^2:
$\lambda_1=38^2=1444$
$\lambda_2=\left(\frac{1}{2}(71-\sqrt{5})\right)^2=\frac{1}{2}(2523-71\sqrt{5})$
$\lambda_3=\frac{1}{2}(2523+71\sqrt{5})$.

Egenvektorerna till A^2 blir (enl. Lemma 1) desamma som för $\mathsf{B}=\mathsf{A}-35\,\mathsf{I}$, dvs (efter en räkning liknande den i föregående exempel):
$\boldsymbol{x}_1=(0,1,0)^T$, $\boldsymbol{x}_2=(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-\frac{2}{5+\sqrt{5}},1)^T$ och $\boldsymbol{x}_3=(\frac{1+\sqrt{5}}{2},-\frac{2}{5-\sqrt{5}},1)^T$. □

Exempel Antag λ är ett egenvärde till A. Bestäm ett egenvärde till $2\mathsf{A}-\mathsf{I}-\mathsf{A}^2$.

Lösning Observera först att $2\mathsf{A}-\mathsf{I}-\mathsf{A}^2=-(\mathsf{A}-I)^2$. Eftersom λ är egenvärde till A så är (enl. Lemma 1 (ii)) $\lambda-1$ ett egenvärde till $\mathsf{A}-\mathsf{I}$, och (enl. Lemma 1 (iii)) $(\lambda-1)^2$ ett egenvärde till $(\mathsf{A}-\mathsf{I})^2$, och (enl. Lemma 1 (i)) $-(\lambda-1)^2$ ett egenvärde till $-(\mathsf{A}-\mathsf{I})^2$. □

Det polynom i λ av grad n som fås genom att beräkna $\det(\lambda\,\mathsf{I}-\mathsf{A})$ kallas det **karakteristiska polynomet** och ekvationen $\det(\lambda\,\mathsf{I}-\mathsf{A})=0$ den **karakteristiska ekvationen**.

Sats 1
Egenvärdena till A är nollställena till $\det(\lambda\,\mathsf{I}-\mathsf{A})$. Egenvektorerna till A är de icke-triviala lösningarna till ekvationen $(\lambda\,\mathsf{I}-\mathsf{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ m.a.p. $\boldsymbol{x}$.

Resten av kapitel 10 ingår ej i kursen.