© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 7: Matriser

Detta är ett *mycket* viktigt kapitel! Matriser är en förutsättning för till många ingenjörs- och naturvetenskapliga tillämpningsområden men också en oerhört viktig förkunskap inför fortsatta matematikstudier. Mycken matematikprogramvara bygger kring matrisbegreppet.

Definitioner

En **radvektor** är en rad av tal. En **kolonnvektor** är en kolumn av tal. En **$m\times n$-matris** A är ett system för $m\times n$ tal i m rader och n kolonner

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En radvektor med n element är en $1\times n$-matris och en m element hög kolonnvektor är en $m\times 1$-matris. Ett exempel på en 2×3-matris är t ex

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

En matris med lika många rader som kolonner kallas **kvadratisk**.

En ofta förekommande matrisoperation är *transponering*. Antag att A är en $m\times n$-matris typiskt med element a_{ij} på rad $i \in \{1,\ldots,m\}$ kolonn $j \in \{1,\ldots,n\}$. Då betecknas **transponatet** av A med A^T som är en $n\times m$-matris vars element är a_{ji} på rad $i \in \{1,\ldots,n\}$ kolonn $j \in \{1,\ldots,m\}$. I fallet med 2×3-matrisen ovan hade transponering inneburit

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

dvs första raden blir första kolonnen i transponatet och andra raden blir andra kolonnen i transponatet. Eftersom det blir utrymmeskrävande att skriva kolonnvektorer (då de tar stort utrymme på höjden men litet i sidled) anger man dem ofta som transponerade radvektorer istället.

Addition och **subtraktion** av matriser fungerar elementvis. Antag att A och B är $m\times n$-matriser. Då är elementet på rad i och kolonn j i $m\times n$-matrisen $\mathsf{A}-\mathsf{B}$ just $a_{ij}-b_{ij}$.

Matrismultiplikation däremot är lite krångligare. Låt $\boldsymbol{a}_i$ beteckna rad i i $k\times m$-matrisen A och $\boldsymbol{b}_j$ beteckna kolonn j i $m\times n$-matrisen B. Då är produktmatrisen AB av storlek $k\times n$ och den har talet

$$c_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j$$

på rad i och kolonn j, där $i = 1,\ldots,k$ och $j = 1,\ldots,n$.

Exempel

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot2-1\cdot2+7\cdot1 & 5\cdot3+1\cdot1-7\cdot4 \\ 2\cdot2-3\cdot2+2\cdot1 & 2\cdot3+3\cdot1-2\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Se även Exempel 2 i boken.

Obs! Matriser är **ej** kommutativa m.a.p. multiplikation, dvs i allmänhet är $\mathsf{AB} \neq \mathsf{BA}$.

Obs! Produkten AA är endast definierad för kvatratiska matriser, dvs $n\times n$ matriser. Däremot är "matriskvatdraten" $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$ definierad för alla matriser A.

Sekvensen $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ av komponenter, ur en kvadratisk matris A, kallas **huvuddiagonal**.

En matris som består av enbart nollor kallas **nollmatris** och betecknas $\mathsf{0}$. (Ofta framgår det av sammanhanget vilka dimensioner den måste ha och då talar man om nollmatris*en*.) Den kvadratiska matris som har ettor i diagonalen och nollor i övrigt kallas **enhetsmatrisen** och betecknas I.

Enhetsmatrisen har den behagliga egenskapen att lämna en matris oförändrad vid matrismultiplikation: $\mathsf{AI} = \mathsf{IA} = \mathsf{A}$.

Vad ska man då ha matriser till? En anledning till att arbeta med matriser är att man kan formalisera stora ekvationssystem till en väldigt mycket mer kompakt och lättöverskådlig framställning. En annan är att många kalkylprogram är utrustade med verktyg för matrisberäkningar och dessa verktyg är kraftfulla redskap i händerna på den som vet hur man använder dem.

Exempel (ekvationssystem)
Skriv ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x + 3y &= 2 \\ x + 3y &= 3 \end{cases}$$

som en matrisekvation.

Lösning
Låt 2×2-matrisen A vara

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(dvs koefficienterna framför x respekive y i ekvationssystemet) och kolonnvektorerna

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(dvs variablerna respektive högerleden i ekvationerna). Då kan ekvationssystemet skrivas $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{B}$ eftersom

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 3y \\ x + 3y \end{bmatrix}$$

och likhet fungerar elementvis så det första elementet i $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$: $4x + 3y$ ska vara lika med första elementet i B : 2 och andra i $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$: $x + 3y$ ska vara lika med andra i B : 3, dvs ekvationssystemet skrivs $\underline{\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{B}}$. $\square$

Räkneregler (se boken Sats 1, s. 120–121 och Sats 2, s. 124)
$\mathsf{A}+\mathsf{B} \;=\; \mathsf{B}+\mathsf{A}$
$\mathsf{A}+(\mathsf{B}+\mathsf{C}) \;=\; (\mathsf{A}+\mathsf{B})+\mathsf{C}$
$\mathsf{A}+0 \;=\; \mathsf{A}$
$\mathsf{A}+(-1)\mathsf{A} \;=\; 0$
(skalärmultiplikation trivialt)
$\mathsf{AI} \;=\; \mathsf{IA} \;=\; \mathsf{A}$
$(\mathsf{AB})\mathsf{C} \;=\; \mathsf{A}(\mathsf{BC})$
$(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mathsf{C} \;=\; \mathsf{AC}+\mathsf{BC}$
$\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) \;=\; \mathsf{AB}+\mathsf{AC}$
$(\mathsf{A}^T)^T \;=\; \mathsf{A}$
$(\mathsf{A}+\mathsf{B})^T \;=\; \mathsf{A}^T+\mathsf{B}^T$
$(\lambda\mathsf{A})^T \;=\; \lambda\mathsf{A}^T$
$(\mathsf{AB})^T \;=\; \mathsf{B}^T\mathsf{A}^T$

Läs beviset av att $(\mathsf{AB})^T = \mathsf{B}^T\mathsf{A}^T$.

Sats 3 Om A är en kvadratisk matris, så är

$$\left\{\begin{array}{c}\mathsf{A}\text{:s kolonner}\\ \text{bas för } \mathbb{R}^n\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\mathsf{A}\boldsymbol{x} = 0 \text{ har entydig}\\ \text{lösning: } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{B} \text{ lösbar}\\ \text{för alla } \mathsf{B} \in \mathbb{R}^n\end{array}\right\}$$

<u>**Inversen**</u>

Antag att A är en $n \times n$-matris. Då kallas $n \times n$-matrisen A^{-1} för **inversen** till A om $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$ där I är $n \times n$-enhetsmatrisen. Om A har en invers, A^{-1}, kallas A **inverterbar**.

Eftersom inget händer om vi multiplicerar en matris med enhetsmatrisen kan vi lösa matrisekvationen. Antag att A^{-1} är inversen till A. Då är

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \mathsf{B} \\ \underbrace{\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}}_{=\mathsf{I}}\boldsymbol{x} &= \mathsf{A}^{-1}\mathsf{B} \\ \boldsymbol{x} &= \mathsf{A}^{-1}\mathsf{B} \end{aligned}$$

För att kunna räkna med inversen får vi några extra räkneregler:

Räkneregler för invertering (se boken Sats 4, s. 130)
$(\mathsf{A}^{-1})^{-1} \;=\; \mathsf{A}$
$(\mathsf{A}^T)^{-1} \;=\; (\mathsf{A}^{-1})^T$
$(\mathsf{AB})^{-1} \;=\; \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}$

Läs Exempel 5.

Läs extensivt s. 132–133.

Exempel (ekvationssystem, forts.)
Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x+3y &= 2 \\ x+3y &= 3 \end{cases}$$

som en matrisekvation.

Lösning
Ekvationssystemet kan med matriser skrivas

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{B}$$

där $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = [x \quad y]^T$ och $\mathsf{B} = [2 \quad 3]^T$.

Genom att multiplicera *från vänster* med inversen till A i båda led får vi

$$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \mathsf{I}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{x} \;=\; \mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}$$

dvs matrisekvationen har lösningen $\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}$.

För att beräkna inversen till A går vi tillbaka till ekvationssystem igen (än så länge): vi ska först lösa ekvationen $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ med ett generellt högerled $\boldsymbol{z} = [z_1 \quad z_2]^T$.

$$\begin{cases} 4x+3y &= z_1 \\ x+3y &= z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y &= z_1 \\ -9y &= z_1-4z_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x &= z_1+\frac{1}{3}(z_1-4z_2) \\ -9y &= z_1-4z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{4}(\frac{4}{3}z_1-\frac{4}{3}z_2) \\ y &= -\frac{1}{9}(z_1-4z_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{3}z_1-\frac{1}{3}z_2 \\ y &= -\frac{1}{9}z_1+\frac{4}{9}z_2 \end{cases}$$

Detta innebär att inversen matrisen bestående av koefficienterna *med tecken* framför z_1 respektive z_2: $\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/9 & 4/9 \end{bmatrix}$ varmed lösningen $\boldsymbol{x}$ slutligen kan beräknas som

$$\boldsymbol{x} \;=\; \mathsf{A}^{-1}\mathsf{B} \;=\; \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/9 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -1/3 \\ 10/9 \end{bmatrix}$$

□

Vi ska snart lära oss effektivare sätt att bestämma inversen men i det allmänna fallet är detta en mödosam operation.

Några övningar

Övning 1

Antag att $a = [\,1\ \ 5\ \ 4\,]$ och $b = [\,6\ \ 2\ \ 2\,]^T$. Beräkna

a) ab b) ba

Övning 2

Antag att

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna

a) $\mathsf{A} - \mathsf{B}$ b) $\mathsf{A}^T\mathsf{B}$ c) $|\mathsf{B}\mathsf{A}^T|$ d) $(\mathsf{A}\mathsf{B}^T)^{-1}$

(Facit till dessa finns på sista sidan. Räkna dem *innan* du kollar facit!)

Basbyten

Läs Sats 6 (s. 137) i boken.

Exempel

Antag att $\boldsymbol{u} = (1, 2, -3)$ m.a.p. ON-basen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ och låt

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

Vad är koordinaterna för $\boldsymbol{u}$ m.a.p. basen $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$?

Lösning

Beteckna med $\boldsymbol{u}'$ koordinaterna för $\boldsymbol{u}$ m.a.p. $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$. Den matris som transformerar från basen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ till basen $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ är

$$\mathsf{S} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

varmed lösning fås genom att

$$\boldsymbol{u} = \mathsf{S}\boldsymbol{u}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u}' = \mathsf{S}^{-1}\boldsymbol{u}\,.$$

Man får med notation från s. 136 (enklare att både skriva och läsa):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 5 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 21 & -7 & 0 & 6 & -5 & 9 \\ 0 & 21 & 0 & -9 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 5 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 63 & 0 & 0 & 9 & -18 & 45 \\ 0 & 21 & 0 & -9 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 5 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 5 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow \mathsf{S}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

varmed $\boldsymbol{u}' = \mathsf{S}^{-1}\boldsymbol{u} = \frac{1}{7}[-18 \quad -23 \quad 38]^T$. $\square$

Obs! Att *ortogonala matriser* egentligen är "ortonormerade matriser".

Sats 7
A ortogonal $\Leftrightarrow$ A:s kolonner ON-bas $\Leftrightarrow$ A:s rader ON-bas $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{I}$ $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A}\mathsf{A}^T = \mathsf{I}$ $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^T$

Avsnitt 7.7 läses extensivt.

Facit

Övning 1: a) 24 b) $\begin{bmatrix} 6 & 30 & 24 \\ 2 & 10 & 8 \\ 2 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

Övning 2: a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 13 & 18 & 8 \\ 13 & 17 & 9 \end{bmatrix}$

c) 30 d) $\begin{bmatrix} 7/10 & -6/10 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$