Tentamen i MAN030, Flervariabelanalys 1, 03 03 24, kl 8.45-13.45.

1. Visa att en delmängd M till $\mathbf{R}^n$ är kompakt precis när varje punktföljd i M har en konvergent delföljd med gränsvärde i M.
2. Visa att om $f(x,y)$ är en C^1-funktion så är den differentierbar.
3. Motivera att funktionen $f(x,y)=y(x^2-5y^2/3)-x^2$ har ett största och ett minsta värde i området $x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq x$. Bestäm också dessa värden.
4. Lös differentialekvationen $2f'_x+f'_y=0$, t.ex. genom att göra ett variabelbyte av formen $u=ax+by$, $v=x$, för lämpliga konstanter a och b. Bestäm också den lösning som har $f(x,0)=x^2$.
5. Berstäm de lokala extrempunkterna till funktionen

$$f(x,y)=(y^2-x^2)e^{xy/2-x-y}.$$

6. Visa att sambandet

$$(x^3-1)z+(y-2)z^3+x^2y^2=4$$

bestämmer $z=z(x,y)$ som en funktion av x och y i närheten av (2,1,0). Bestäm också Taylorutvecklingen av ordning 1 av $z(x,y)$ kring punkten (2,1). Är z en funktion av x och y i närheten av (1,2,0)?

7. Kan man bestämma konstanten a så att funktionen

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{när} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{när} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

blir differentierbar i origo? Vad ska a i så fall vara?

8. Undersök om funktionen

$$f(x,y)=\frac{\arctan x^2y}{x^2+y^2}$$

är likformigt kontinuerlig i området där $x^2+y^2\neq 0$.

Jan-Alve Svensson
2003-03-24