Lösningar Tentamen i MAN030 Flervariabelanalys, del 1, 02 08 12.

1.

2.

3.

4. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_u \cdot 2ax + f'_v \cdot 1 \\ f'_y &= f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 0 \end{aligned}$$

Väljer vi a=1/2 blir ekvationen därför $f'_v=y=u-v^2/2$, som ger $f=uv-v^3/6+g(u)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion. Återgång till variablerna x och y ger $f(x,y)=(x^2/2+y)x-x^3/6+g(x^2/2+y)$, vilket i sin tur ger $f(x,0)=x^3/3+g(x^2/2)$ som alltså ska vara $x^2+x^3/3$. Detta leder till $g(x^2/2)=x^2$. Sätter vi $t=x^2/2$ har vi $x^2=2t$ och $g(t)=2t$. Den sökta lösningen är alltså $f(x,y)=(x^2/2+y)x-x^3/6+2(x^2/2+y)=x^3/3+x^2+xy+2y$.

Svar: $f(x,y)=(x^2/2+y)x-x^3/6+g(x^2/2+y)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion respektive $f(x,y)=(x^2/2+y)x-x^3/6+2(x^2/2+y)=x^3/3+x^2+xy+2y$.

5. Funktionen är kontinuerlig på den triangelskivan säm är sluten och begränsad och därmed kompakt. Fuy ktionen antar därför säkert ett största och ett minsta värde. Dessa antas när $\mathrm{grad} f = \mathbf{0}$ i det inre av skivan eller på skivans rand. Vi söker stationära punkter i det inre och får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 4y^2 + 2xy^2 - y^3 = y^2(4 - 2x - y) \\ 0 = f'_y = 2xy + 2x^2y - 3xy^2 = xy(8 - 2x - 3y) \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger x=0, y=0 eller 8-2x-3y=0. Första fallet ger y=0 eller y=4 i första ekvationen. Men (0,0) och (0,4) ligger inte i det inre av skivan. Fallet y=0 ger x godtyckligt i första ekvationen, men ingen punkt (x,0) ligger i det inre av skivan. Fallet 8-2x-3y=0 tillsammans med 4-2x-y=0 från första ekvationen ger y=2 och x=1 och (1,2) ligger i det inre av skivan. Där har vi $f(1,2)=4$. Vi undersöker nu f längs skivans rand. Den består för det första av punkter (t,0), för det andra av (0,t) och för det tredje av (6-t,t) där t varierar mellan 0 och 6. Vi har $f(t,0)=0=f(0,t)$ och längs den tredje delen av randen $f(6-t,t)=4(6-t)t^2-(6-t)^2t^2-(6-t)t^3=2t^3-12t^2$. Derivering av detta ger $6t^2-24t$ som är 0 när t=0 och när t=4. Bara det andra värdet är intressant. Vi har $f(6-4,4)=f(2,4)=-64$.

Svar: Största värdet är 4 och minsta är -64.

6. Vi ska ha att $\mathbf{grad}\, f(1,1) = (0,0)$, vilket ger systemet

$$\begin{cases} 0 = 3x^2 - by = 3 - b \\ 0 = 2ay - bx = 2a - b \end{cases}$$

som ger b=3 och a=3/2. Där med är $f=x^3+3y^2/2-3xy$. För att avgöra vilket typ av stationär punkt (1,1) är ska vi undersöka den kvadratiska formen $Q=f''_{xx}(1,1)h^2+2f''_{xy}(1,1)hk+f''_{yy}(1,1)k^2$. Vi har

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6x \\ f''_{xy} &= -3 \\ f''_{yy} &= 3 \end{aligned}$$

så $Q=6h^2-6hk+3k^2=6(h-k/2)^2+(3-6/4)k^2$, som är positivt definit. Punkten (1,1) är därför en lokal minimipunkt.

Svar: a=3/2, b=3 och (1,1) är en lokal minimipunkt till funktionen.

7. För att bestämma $f'_x(0,0)$ och $f_y(0,0)$ ska vi beräkna gränsvärdet av $(f(t,0)-f(0,0))/t=0/t=0$ respektive $(f(0,t)-f(0,0))/t=0/t=0$ när $t \to 0$. Båda gränsvärdena existerar och är 0. Om f vore differentierbar i origo skullen den även vara kontinuerlig där. Men $f(0,0)=0$ och $f(t,t^2)=1/2$, när $t \neq 0$, så f antar värdena 0 och 1/2 i varje omgivning till origo och kan därför inte vara kontinuerlig där.

Svar: f är inte differentierbar.

8. Funktionen är kontinuerlig över allt där den är definierad eftersom den är kvot av två kontinuerliga uttryck. Den är inte definierad längs enhetscirkeln. Området $x^2+y^2 \leq 2$ är kompakt och f är kontinuerlig där och därför likformigt kontinuerlig. Allstå är den det även på det mindre området $x^2+y^2<1/2$. Om f vore likformigt kontinuerlig på $x^2+y^2<1$ skulle den ha en kontinuerlig utvidgning till randen som är enhetscirkeln. Vi undersöker f då $(x,y) \to (1,0)$. Längs x-axeln har vi $f(x,0)=$ $(1-\ln(1+x^2))/(1-x^2)$. När $x \to 1$ går täljaren mot $1-\ln(2) \neq 0$, medan nämnaren går mot 0. Funktionen f har alltså inget gränsvärdet när (x,y) går mot (1,0) och kan därför inte utvidgas kontinuerligt till denna punkt. Funktionen är alltså inte likformigt kontinuerlig i området $x^2+y^2<1$.

Svar: Funktionen är likformigt kontinuerlig i $x^2+y^2<1/2$, men inte i $x^2+y^2<1$.

Jan-Alve Svensson
2002-08-13