Lösningar Tentamen i MAN030 Flervariabelanalys, del 1, 03 03 24.

3. Mängen *D* som bestäms av $x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq x$ är kompakt och funktionen är kontinuerlig på mängden. Den antar därför säkert ett största och ett minsta värde på mängden. Detta inträffar längs randen eller i stationära punkter i det inre av mängden. För stationära punkter löses

$$\begin{cases} 0 &= f'_x &= 2x(y-1) \\ 0 &= f'_y &= x^2-5y^2 \end{cases}$$

Den första ekvationen ger x=0 eller y=1 som ingedera kan leda till inre punkt i mängden *D*. Stationära punkter i det inre saknas. Vi undersöker *f* längs den del av randen där $x^2+y^2=1$, $x\geq 0$. Uttrycket för den förenklas där till $f=g(y)=y-8y^3/3-1+y^2$, där $-1\leq 1$. Man har $0=g'(y)$, när $y=1/2$, $y=-1/4$. Detta ger de intressanta värdena

$$\begin{aligned} g(-1) &= 5/3 \\ g(-1/4) &= -55/48 \\ g(1/2) &= -7/12 \\ g(1) &= -5/3 \end{aligned}$$

Längs den andra delen av randen är x=0 och $-1\leq y\leq 1$. Funktionen förenklar där till $h(y)=f=-5y^3/3$ som är strängt avtagande. Eftersom $g(1)=h(1)$ och $g(-1)=h(-1)$ blir funktionen största värde 5/3 och det minsta blir -5/3.

Svar: 5/3 respektive -5/3.

4. Variabelbytet ger

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_u\cdot a+f'_v\cdot 1 \\ f'_y &= f'_y\cdot b+f'_v\cdot 0. \end{aligned}$$

Väljer man a=1 och b=-2 får man att $2f'_x+f'_y=f'_v$, så att ekvation blir $f'_v=0$. Detta ger $f=g(u)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion. Detta ger $f(x,y)=g(x-2y)$. Man ska ha $x^2=f(x,0)=g(x-0)=g(x)$, så $f(x,y)=(x-2y)^2$.

Svar: $f(x,y)=g(x-2y)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion. Den speciella funktionen är $f(x,y)=(x-2y)^2$.

5. Extrempunkter är stationära punkter eftersom funktionen är differentierbar. Dessa löser

$$\begin{cases} 0 &= -2x+(y/2-1)(y^2-x^2) \\ 0 &= 2y+(x/2-1)(y^2-x^2) \end{cases}$$

Skilnaden mellan dessa ekvationer blir

$$0=(y+x)(2+(y-x)(x/2-y/2)),$$

som ger $y=-x$ eller $y = x \pm 2$. Första fallet ger $x=0$ i första ekvationen, fallet $y=x-2$ ger i andra ekvationen $0=2x-4+(x/2-1)(-4x-4)$, som ger $x = \pm 2$. Fallet $y=x+2$ ger i andra ekvatione $0=2x+4+(x/2-1)(4x+4)$, dvs $x=0$. Totalt är de stationära punkterna (0,0), (2,0) och (0,2). Man har

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= (-2-4x(y/2-1)+(y^2-x^2)(y/2-1)^2)e^{xy/2-x-y} \\ f''_{xy} &= (3y^2/2-2y-x^2/2+(-2x+(y^2-x^2))(x/2-1))e^{xy/2-x-y} \\ f''_{yy} &= (2+4y(x/2-1)+(y^2-x^2)(x/2-1)^2)e^{xy/2-x-y} \end{aligned}$$

I (0,0) är den kvadratiska formen $Q=-2h^2+2k^2$, som är indefinit. Sadelpunkt.

I (0,2) är $Q=-2e^{-2}(h^2-2hk+k^2)=-2e^{-2}(h-k)^2$ som är negativt semidefinit.

I (2,0) är $Q=2e^{-2}(h^2-2hk+k^2)=2e^{-2}(h-k)^2$ som är positivt semidefinit.

I de två sista punkterna fungerar inte metoden med kvadratisk form.

Vi gör variabelbytet

$$\begin{cases} u = y+x \\ v = y-x \end{cases}$$

Funktionen blir då

$$f=uve^{(u^2-v^2)/8-u}=ue^{u^2/8-u}ve^{-v^2/8}=g(u)h(v),$$

där $g(u)=ue^{u^2/8-u}$ och $h(v)=ve^{-v^2/8}$. Vi har $g'=(1+u^2/4-u)e^{u^2/8-u}$, eller $g'=(1-u/2)^2e^{u^2/8-u}$ som är >0 utom när $u=2$. Funktionen g är därför strängt växande. Detta visar att f saknar extrempunkter.

Svar: Extrempunkter saknas.

6. Linearisering av ekvationen kring lösningen (1,2,0) ger

$$4(x-2)+8(y-1)+7z=0,$$

där z kan lösas ut som funktion av x och y. Enligt inversa funktionssatsen är detta möjligt även i den ursprungliga ekvationen i närheten av (2,1,0). Vi ser att (1,2, z) löser ekvationen. Så inte i någon omgivning (1,2,0) kan ytan framställas som grafen till en funktion av x och y.

7. För differentierbarhet krävs kontinuitet. Eftersom

$$\frac{\sin xy}{\quad} = \frac{\sin xy}{\quad}\frac{xy}{\quad} \to 1\cdot 0 = 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} - \quad xy \quad \sqrt{x^2+y^2} \quad \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

när $(x,y) \to (0,0)$ ska *a*=0 för kontinuitet. (Vi har använt att $\sin t/t \to 1,$ när $t \to 0$ och att

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \{\text{ PK }\} = r\cos t \sin t \to 0,$$

oberoende av *t*, när $r \to 0$.) Eftersom *f* då är konstant 0 längs axlarna är den partiellt deriverbar i origo med partialderivator båda =0. För att avgöra differentierbarhet ska vi undersöka det relativa felet

$$R(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\Big(\frac{\sin xy - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} - (0,0)\cdot(x,y)$$

när $(x,y) \to (0,0)$. Polära koordinater och samma trick som ovan ger

$$R = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos t \sin t$$

som saknar gränsvärde oberoende av *t* när $(x,y) \to (0,0)$.

8. Eftersom $\arctan t/t \to 1,$ när $t \to 0$ har vi $f = (\arctan x^2y/x^2y)(x^2y/\sqrt{x^2+y^2}) \to 1\cdot 0 = 0,$ när $(x,y) \to (0,0),$ (eventuellt med hjälp av polära koordinater). Vi kan därför utvidga *f* kontinuerligt till origo genom att sätta *f*(0,0)=1. Vidare gäller att $|f| \le \pi/2(x^2+y^2) \to 0,$ när $|(x,y)| \to \infty$. Detta ger att *f* är likformigt kontinuerlig.

Jan-Alve Svensson
2003-03-24