Lösning till MAN030 Flervariabelanalys del 1, 03 04 15

<<<<<

1. Sätter vi $f(x, y, z) = xz^2 + x^2y^2 + y^3z$ ges en normal till tangentplanet av grad$f$ (1, 2, 3). Vi har grad$f = (z^2 + 2xy^2, 2x^2y + 3y^2z, 2xz + y^3)$, så (17, 40, 14) är en normal. Tangentplanet har därför ekvationen

$$0 = (17, 40, 14) \cdot (x - 1, y - 2, z - 3).$$

Svar: $139 = 17x + 40y + 14z$.

2. Området är slutet och begränsat och därmed kompakt. Eftersom funtkionen är kontinuerlig antar den därför ett störtsta och ett minsta värde i området.

Eftersom $x, y, z \geq 0$ är $f(x, y, z) = \sqrt{xy}\,z \geq 0$. Vi ser att $f(x, y, z)$ är 0 när någon av koordinaterna är = 0. T.ex. ligger punkten (0, 0, 0) i området och $f(0, 0, 0) = 0$, så minsta värdet är 0.

Vi söker stationära punkter till f. Där är grad$f = x^{-1/2}y^{-1/2}(yz/2, xz/2, xy) = (0, 0, 0)$, vilket inträffar precis när minst två av koordinaterna är = 0. Ingen sådan punkt är en inre punkt i området, så största värdet antas längs randen på området.

Randet består av tre trianglar i olika koordinatplan där f antar värdet 0 och triangelytan i planet $x + 2y + 3z = 4$, där $x, y, z \geq 0$. Längs randen till triangelytan antar f värdet 0, så största värdet till f antas innuti triangelytan.

Sätter vi $g(x, y, z) = x + 2y + 3z$ gäller att största värdet antas i en punkt som löser

$$\begin{cases} 4 = x + 2y + 3z, \ x, y, z > 0 \\ \text{grad}f \text{ och grad}g \text{ är parallella} \end{cases}$$

Det sista villkoret kan skrivas $(0, 0, 0) = x^{-1/2}y^{-1/2}(yz/2, xz/2, xy) \times (1, 2, 3)$, dvs

$$(0, 0, 0) = x^{-1/2}y^{-1/2}(3xz/2 - 2xy, - 3yz/2 + xy, yz - xz/2),$$

som tillsammans med det första villkoret ger $3z = 4y$, $3z = 2x$ och $x = 2y$. Insatt i den första ekvationen ger detta $4 = 3x$, eller $x = 4/3$, $y = 2/3$, och $z = 8/9$. Vi har $f(4/3, 2/3, 8/9) = 2\sqrt{2} \cdot 8/27$.

Svar: Största värdet är $16\sqrt{2}/27$ och minsta värdet är 0.

3. Det stationära punkterna till $f(x, y)$ löser ekvationssystemte

$$0 = f'_x = 3x^2 + 6xy$$
$$0 = f'_y = -4y - 8y^3 + 3x^2$$

Den översta ekvationen ger $x = 0$ eller $x = -2y$ som i den nedre ger $y = 0$ respektive $y = 0$, $y = 1$, eller $y = 1/2$. De stationära punkterna är alltså (0, 0), (- 2, 1) och (- 1, 1/2). Vi undersöker respektive kvadratisk form associerad till dessa punkter. Vi har

$$\begin{cases} f''_{xx} &= 6x+6y \\ f''_{xy} &= 6x \\ f''_{yy} &= -4-24y^2 \end{cases}$$

I (0, 0) ger detta den kvadratiska formen $-4k^2$ som är negativt semidefinti och därför inte kan användas för att avgöra om origo är en lokal extrempunkt. Däremot är $f(x, 0) = x^3$, så vi ser att origo inte är en lokal extrempunkt.

I (- 2, 1) är den kvadratiska formen $-6h^2 - 24hk - 28k^2 0 = -6(h + 2k)^2 - 4k^2$, som är negativt definit. Allstå är (- 2, 1) en lokal maximipunkt.

I (- 1, 1/2) är den kvadratiska formen $-3h^2 - 12hk - 10k^2 0 = -3(h + 2k)^2 + 2k^2$ som är indefinti. Punkter är därför en sadelpunkt.

Svar: De stationära punkterna är (0, 0), (- 2, 1) och (- 1, 1/2) och bara (- 2, 1) är en lokal extrempunkt.

4. <

(a) Vi har att $f(t) \to \infty$, när $t \to \pi/2^-$, så funktionen kan inte utvidgas kontinuerligt till $[0, \pi/2]$, som är slutna höljet till det givna intervallet. Funktionen är därför inte likformigt kontinuerlig.

(b) Funtktionen är kontinuerlig på det kompakta intervallet [1, 2] och därför likformigt kontinuerlig.

(c) Eftersom $f(t) \to 0$, när $t \to 0^+$, kan f utvdigas kontinuerligt till [0, 2] genom att sätta $f(0) = 0$. Funktionen är då likformigt kontinuerlig på det kompakta intervallet [0, 2] och därför likformigt kontinuerlig på det mindre intervallet]0, 2].

Svar: Funtkioneran i (b) och (c) är likformigt kontinuerliga.

5. För differentierbarhet krävs kontinuitet. Detta ger att vi måste välja $a = \lim_{x\to 0} f(x, 0)$. Vi har, med Mc Laurin-utveckling,

$$f(x, 0) = \frac{\sin(x) - x}{x^2} = -x/(3!) + x^3 B(x),$$

där $B(x)$ är begräsad nära $x = 0$. Detta ger $a = 0$, som enda möjlighet. För differentierbarhet i origo krävs att de partiella derviatorna där ska existera. Vi har

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = -1/6 + x^2 B(x) \to -1/6$$

när $x \to 0$, så $f'_x(0, 0) = -1/6$. Samma räkning visar att $f'_y(0, 0) = -1/6$. För differentierbarhet krävs nu att det relativa felet

$$R(x, y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) + (1/6)(1,1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

går mot noll när $(x, y) \to (0, 0)$.

Vi har

$$R(x, y) = \frac{-(x+y)^3 + (x+y)(x^2+y^2) + (x+y)^5 B(x+y)}{6(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Övergång till polära koordinater ger att vi kan strunta i termen med B och att vi då får

$$-(\cos t + \sin t)^3/6 + (\cos t + \sin t)/6$$

som inte har något gränsvärde oberoende av t när $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.

Svar: Nej.

6. Vi vet att **f** är differentierbar som en följd av förutsättningarna och har därför att

$$\mathbf{R}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - d\mathbf{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}-\mathbf{a})}{|\mathbf{b}-\mathbf{a}|}$$

går mot 0, när $\mathbf{b} \to \mathbf{a}$.

Vi sätter $\mathbf{b} = \mathbf{a} + t\mathbf{h}$ $(t > 0)$ och får av detta . Efter skalärprodukt med $t\mathbf{h}$ och division med t^2, att

$$0 \geq \mathbf{h} \cdot (|\mathbf{h}|\mathbf{R}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) + d\mathbf{f}_{\mathbf{a}}\mathbf{h})$$

enligt förutsättnigen. När $t \to 0^+$ ger detta den sökta olikheten.

---

janalve 2003-04-17