Lösningar Tentamen i MAN030 Flervariabelanalys, del 1, 02 06 12.

1.
2.
3.
4. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_u y + f'_v \cdot 0 \\ f'_y &= f'_u x + f'_v \cdot 1 \end{aligned}$$

Ekvationen blir därför $-yf'_v = xy^2 - y$, eller $f'_v = -u+1$, som ger $f = -uv+v+g(u)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

Svar: $f(x,y) = -xy^2+y+g(xy)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

5. Funktionen är kontinuerlig på den slutna begränsade ellipsskivan och antar därför säkert ett största och ett minsta värde. Dessa antas när $\mathrm{grad} f = \mathbf{0}$ i det inre av skiva eller på skivans rand. Vi söker stationära punkter i det inre och får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = f'_x = (-2x + 2x(2 - x^2 - 3y^2))e^{x^2+y^2} \\ 0 = f'_y = (-6y + 2y(2 - x^2 - 3y^2))e^{x^2+y^2} \end{cases}$$

Efter förkortning med $e^{x^2+y^2}$ (som ju är >0) får vi

$$\begin{cases} 0 = 2x(1 - x^2 - 3y^2) \\ 0 = 2y(-1 - x^2 - 3y^2) \end{cases}$$

Översta ekvationen ger $x=0$ eller $1-x^2-3y^2=0$. Första alternativet ger $y=0$ i nedersta ekvationen, medan det andra ger $y=0$ och därmed $x = \pm 1$. De stationära punkterna är (0,0), (-1,0) och (1,0) som samtliga ligger i det inre av ellipsskivan. Vi har $f(0,0)=2$, $f(-1,0)=f(1,0)=e>2$. Längs randen till ellipsskivan, där $x^2+3y^2=2$, har vi $f=0$

Svar: Största värdet är e och minsta är 0.

6. Vi ser att f är definierad (och kontinuerlig) över allt utom i origo. Vi undersöker om f kan definieras även här så att den blir kontinuerlig i hela planet. För kontinuitet ska vi ha att $f(0,0)$ ska vara gränsvärdet av $f(x,y)$ när $(x,y) \to (0,0)$. Vi har att $\cos(t)=1-t^2/2+t^4B(t)$, där B är begränsad nära $t=0$. Detta ger $(cos(xy) - 1)/(xy)^2 \to -1/2,$ när $(x,y) \to (0,0)$. Polära koordinater ger att

$(xy)^2/(x^2+y^2) = r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \to 0,$ när $(x,y) \to (0,0)$, eftersom $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$ är begränsade. Totalt får vi

$f = [(\cos(xy)-1)/(xy)^2][(xy)^2/(x^2+y^2) \to (-1/2)\cdot 0,$ när $(x,y) \to (0,0)$. Vi har nu att *f* blir kontinuerlig i hela planet om vi sätter *f*(0,0)=0. Vi undersöker nu *f* när $|(x,y)| \to \infty$. Vi har $0 \geq |f| = |\cos(xy)-1|/(x^2+y^2) \leq 2/(x^2+y^2) \to 0,$ när $|(x,y)| \to \infty$. Detta ger att *f* är likformigt kontinuerlig.

Svar: Funktionen *f* är likformigt kontinuerlig.

7. Enligt implicita funktionssatsen ger sambandet *y* som en funktion av *x* och *z* i närheten av (1,2,1) om motsvarande gäller för ekvationens linearisering kring punkten. Sätter vi $g(x,y,z)=4x^3z+z^2y^2-xy^3$ blir sambandet $0=g(x,y,z)$. Lineariseringen av detta är $0=g'_x(1,2,1)(x-1)+g'_y(1,2,1)(y-2)+g'_z(1,2,1)(z-1)$. Vi har

$$\begin{cases} g'_x &= 12x^2z-y^3 \\ g'_y &= 2z^2y-3xy^2 \\ g'_z &= 4x^3+2zy^2 \end{cases}$$

så linearisering är $0=4(x-1)-8(y-2)+12(z-1)$. Eftersom vi kan lösa ut *y* som en funktion av *x* och *z* här kan vi också göra det i det ursprungliga sambandet (enligt implicita funktionssatsen). Löser vi ut *y* får vi $y=x/2+3z/2$, som är lineariseringen av *y* som funktion av *x* och *z* kring (1,1).

Svar: Lineariseringen är $y=x/2+3z/2$.

8. Låt $\mathbf{v}=(a,b)$, där $a^2+b^2=1$. För att bestämma $f'_{\mathbf{v}}(0,0)$ ska vi bestämma gränsvärdet av

$$(1/t)(f(ta,tb)-f(0,0))=(1/t)(tat^2b^2/(t^2a^2+t^2b^2))=ab^2$$

när $t \to 0^+$. Vi ser att detta uttryck är konstant så $f'_{\mathbf{v}}(0,0)$ existerar och är ab^2. Om nu *f* vore differentierbar i (0,0) skulle vi kunna beräkna riktningsderivator med hjälp av kedjeregeln: $f'_v(0,0) = \mathrm{grad}\, f(0,0)\cdot \mathbf{v}$. Vi har (enligt ovan) $f'_x(0,0)=f'_{(1,0)}(0,0)=0$ och $f'_y(0,0)=f'_{(0,1)}(0,0)=0$, som ger $\mathrm{grad}\, f(0,0)\cdot\mathbf{v}=0$. Detta strider mot beräkningarna ovan. Alltså är *f* inte differentierbar i origo.

Svar: Funktionen är inte differentierbar i origo.

Jan-Alve Svensson
2002-06-12