4.17 $\pi_1: x+y+3z+6=0$ $\qquad$ $\pi_2: 2x+y-2z-10=0$

$x=-6-s-3t$ $\qquad$ $x=u$

$y=s$ $\qquad$ $y=10-2u+2v$

$z=t$ $\qquad$ $z=v$

Skärning $\quad -6-s-3t=u$

$s=10-2u+2v$

$t=v$

$$\begin{cases} -s-3t-u & =6 \\ s \quad +2u-2v & =10 \\ t \quad -v & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -s-u-3v=6 \\ s+2u-2v=10 \end{cases}$$

$u-5v=16$

$u=16+5v$

$s=10+2v-2(16+5v)=-22-8v$

$t=v$

$\Rightarrow$ $x=-6-(-22-8v)-3v=16+5v$

$y=-22-8v$

$z=v$

$\Rightarrow$ skärningslinjen $(16+5v, -22-8v, v)$

Den har riktningsvektor $\mathbb{v}_1 = (5, -8, 1)$ och en punkt på linjen är $(v = -3)$ $(1, 2, -3)$ så linjen $\ell_1 : (1,2,-3) + (5,-8,1)s$

Den andra går genom $(6,0,1)$ och $(-4,4,-7)$
Riktningsvektor: $(6,0,1) - (-4,4,-7) = (10,-4,8) =$
$= 2(5,-2,4)$ så linjen $\ell_2 : (6,0,1) + (5,-2,4)t$

De skär varandra om det finns (s,t) så att $\ell_1 = \ell_2$ dvs

$$\begin{aligned} 1+5s &= 6+5t \\ 2-8s &= -2t \\ -3+s &= 1+4t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5s - 5t &= 5 \\ -8s + 2t &= -2 \\ s - 4t &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s - t &= 1 \quad (1) \\ 4s - t &= 1 \quad (2) \\ s - 4t &= 4 \quad (3) \end{aligned}$$

$(1)-(3)$: $3t = -3 \Rightarrow t = -1 \overset{(1)}{\Rightarrow} s = 0$
vilket stämmer med (2). (Om det inte stämt med (2) hade det ej funnits lösning dvs linjerna hade ingen skärning.) Detta betyder att linjerna skär varandra i punkten $(1, 2, -3)$ (fås genom att sätta $s = 0$ i ℓ_1 t.ex.

vinkeln mellan dem blir vinkeln mellan riktningsvektorerna

$$\mathbb{V}_1 \cdot \mathbb{V}_2 = (5,-8,1)\cdot(5,-2,4) = 25+16+4 = 45$$

$$|\mathbb{V}_1| = \sqrt{25+64+1} = 3\sqrt{10} \qquad |\mathbb{V}_2| = \sqrt{25+4+16} = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 45 = 3\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{5}\,\cos([\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos([\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2]) = \frac{45}{9\sqrt{10\cdot 5}} = \frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow [\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2]$ antingen $= \frac{\pi}{4}$ eller $-\frac{\pi}{4}$

$$|\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2| = |\mathbb{V}_1|\cdot|\mathbb{V}_2|\cdot\sin([\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2])$$

$$|\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2| = \left|\left(\begin{vmatrix}-8 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}5 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}5 & -8\\ 5 & -2\end{vmatrix}\right)\right|$$

$$= |(-32+2,\ 5-20,\ -10+40)|$$

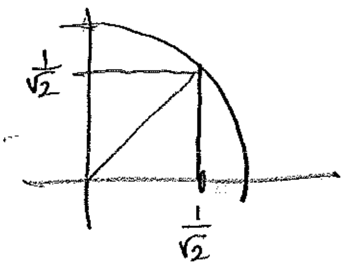
$$= \sqrt{30^2+15^2+30^2}$$

$$= \sqrt{2^2\cdot 15^2+15^2+2^2\cdot 15^2}$$

$$= \sqrt{9\cdot 15^2}$$

$$= 3\cdot 15 = 45$$

$$\Rightarrow \sin([\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2]) = \frac{45}{9\sqrt{10\cdot 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ 

Alltså måste vinkeln $[\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2] = \frac{\pi}{4}$