Ex Antag $\{X_t\}$ är en P-pr(1).
Beräkna vvf, vf då $t=9$ och
kvf, krf då $s=4$, $t=9$

---

vvf $m(t) = E(X_t) = \lambda t \Rightarrow m(9) = 1 \cdot 9 = \underline{\underline{9}}$

vf $v(t) = V(X_t) = \lambda t \Rightarrow v(9) = \underline{\underline{9}}$

kvf $r(s,t) = C\left(\sum_{k=1}^{s} Z_k, \sum_{k=1}^{t} Z_k\right) \overset{s<t}{=} \sum_{k=1}^{s} C(Z_k, Z_k) =$

$= s\lambda$. Pss $r(s,t) \overset{s\geq t}{=} t\lambda \Rightarrow r(s,t) = \lambda \min(s,t)$

$\Rightarrow r(4,9) = 1 \cdot \min(4,9) = \underline{\underline{4}}$

krf $\rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sqrt{v(s)v(t)}} = \dfrac{\lambda \min(s,t)}{\sqrt{\lambda s \lambda t}} = \dfrac{\min(s,t)}{\sqrt{st}}$

$\rho(4,9) = \dfrac{\min(4,9)}{\sqrt{4 \cdot 9}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Antag $\{X_t\}$ P-pr. (1) och dessutom

$$\begin{cases} Y_t = X_t + 2X_{t-1}, & t \geq 2 \\ Z_t = t - 3X_t, & t \geq 2 \end{cases}$$

Beräkna korskvf $C_{Y,Z}$ då $s=4$, $t=9$

<u>korskvf</u> $r_{Y,Z}(s,t) = C(X_s + 2X_{s-1},\ t - 3X_t)$

$$= C(X_s, -3X_t) + C(2X_{s-1}, -3X_t)$$

$$= -3\,r_X(s,t) - 6\,r_X(s-1,t)$$

$$= -3\lambda \min(s,t) - 6\lambda \min(s-1,t)$$

$$= \begin{cases} -3\lambda s - 6\lambda(s-1) & s<t \\ -3\lambda s - 6\lambda(s-1) & s=t \\ -3\lambda t - 6\lambda t & s=t+1 \\ -3\lambda t - 6\lambda t & s>t+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3\lambda(s+s-1) & s \leq t \\ -9\lambda t & s>t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3\lambda(2s-1) & s\leq t \\ -9\lambda t & s>t \end{cases}$$

$$r_{Y,Z}(4,9) = -3\cdot 1(2\cdot 4 - 1) = \underline{\underline{-21}}$$

Sats 1 **speciellt** Om $\{X_t\}, \{Y_t\}$ st. pr.

och $Z_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_k$, $W_t = \sum_{k=1}^{t} b_k Y_k$

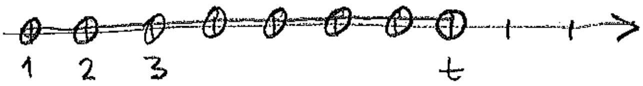
så $C(Z_s, W_t) =$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} a_j b_k C(X_j, Y_k)$$

$\boxed{\text{Obs! P-pr. har ober. stationära ökningar}}$

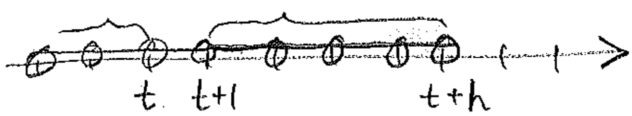
ökningarna är stationära

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} \underset{\uparrow \ \text{ökningar}}{Z_k}$$



summan av ober. variabler i dessa tidpunkter

ökningen $[t+1, t+h]$



$$X_{t+h} = \sum_{k=1}^{t+h} Z_k$$

på sin väg bort till $t+h$ mellanlanda vid t och $t+1$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{t} Z_k}_{X_t} + \underbrace{\sum_{k=t+1}^{t+h} Z_k}_{\text{ökningen på } [t+1,\, t+h]}$$

$$X_{t+h} - X_t = \sum_{k=t+1}^{t+h} Z_k \in Po(\lambda h)$$

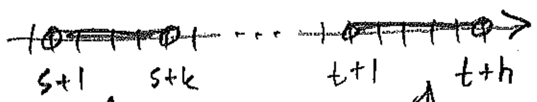
ej ber. av t

dvs ökningen $X_{t+h} - X_t$ beror bara av intervall-längden h, ej av läget t. Därför kallas ökningarna stationära — de påverkas ej av tiden t.

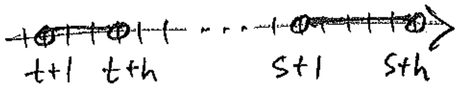
Ökningarna är oberoende

Låt $[s+1, s+k]$ och $[t+1, t+h]$ vara disjunkta intervall (dvs $k, h \geq 1$ och $\begin{cases} s+k \leq t \\ \text{eller} \\ t+h \leq s \end{cases}$

dvs



eller



)

$$\sum_{j=s+1}^{s+k} Z_j = X_{s+k} - X_s$$

$$\sum_{j=t+1}^{t+h} Z_k = X_{t+h} - X_t$$

och eftersom $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ ober. så är

$$\sum_{j=s+1}^{s+h} Z_j = X_{s+k} - X_s \perp X_{t+h} - X_t = \sum_{j=t+1}^{t+h} Z_j$$

Läs Ex 1,2,3 s. 32–34

Man kan även visa för m kont. med det lite svårare...

Ex 2

$$m(t+h) - m(t) = m(h) \quad \& \quad m \text{ deriverbar}$$

(ej detsamma som att processen deriverbar !!)

$$\frac{m(h)}{h} = \frac{m(t+h) - m(t)}{h}$$

$$K = \lim_{h \to 0} \frac{m(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m(t+h) - m(h)}{h} = m'(t)$$

$$\Rightarrow \quad m'(t) = K \quad \text{konstant m.a.p. } t$$

$$\Rightarrow \quad m(t) = \int m'(t)\,dt = \int K\,dt =$$

$$= Kt + C$$

Dessutom $m(0) = 0 \Rightarrow K \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

$m(1) = K \cdot 1 = K.$

Hur korrelation tar sig uttryck

Hur kan man se på observationerna att variablerna verkar korrelerade?

Låt $X \in N(0,1)$, $Y \in N(0,1)$.

Då talar $\rho = \rho(X,Y)$ om hur "lika X och Y vill vara".

ρ nära 1	X litet $\Longleftrightarrow$ Y litet X stort $\Longleftrightarrow$ Y stort
ρ kring 0	X, Y nästan oberoende
ρ nära -1	X litet $\Longleftrightarrow$ Y stort X stort $\Longleftrightarrow$ Y litet

Visa OH - korrelation mellan 2 variabler

I en stok. pr. innebär korrelationen (eg. auto-korrelationen) hur "lika tidigare värden processen vill vara i senare värden" dvs hur "lika X_{t-1} och X_t" t.ex.

Visa OH - korrel. i st. pr.