Gå igenom $m(t)$, $r(s,t)$

Ex Poisson-process

Låt $\{X_t\}$ vara en P-pr. (λ).

a) Visa att vvf $m(t) = E(X_t)$ är invariant under addition: $m(t+s) = m(t) + m(s)$.

b) Visa att kvf $r(s,t) = C(X_s, X_t)$ endast beror av $\min(s,t)$
$r(s,t) = r(\min(s,t))$

c)

---

a) $X_t = \sum_{k=1}^{t} Z_k$ där $Z_1, \dots, Z_t$ är ober. och $Z_k \in Po(\lambda) \Rightarrow E(Z_k) = \lambda$

$$\Rightarrow m(t) = E(X_t) = E\left(\sum_{k=1}^{t} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{t} E(Z_k) = \sum_{k=1}^{t} \lambda = \lambda t$$

så $m(t) + m(s) = \lambda t + \lambda s$.

$$m(t+s) = E(X_{t+s}) = E\left(\sum_{k=1}^{t+s} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{t+s} E(Z_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{t+s} \lambda = \lambda(t+s) = \lambda t + \lambda s = m(t) + m(s).$$

b) $$r(s,t) = C(X_s, X_t) = C\left(\sum_{k=1}^{s} Z_k, \sum_{k=1}^{t} Z_k\right) =$$

$$\overset{s<t}{=} C(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_s, Z_1 + Z_2 + \dots + Z_s + Z_{s+1} + \dots + Z_t)$$

$$= C(Z_1, Z_1) + C(Z_2, Z_2) + \dots + C(Z_s, Z_s) \quad \text{(resten 0)}$$

$$= \lambda + \lambda + \dots + \lambda = \lambda s$$

Pss om $s \geq t$: $r(s,t) = \lambda t$. Alltså $r(s,t) = \lambda \min(s,t)$

Ex Normalprocess

Låt $\{X_t\}$ där $m(t) = E(X_t) = \left(\frac{3}{\pi}\right)^t$

och $r(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{om } s=t \\ 0 & \text{om } s \neq t \end{cases}$ och $X_1, X_2, \ldots$ oberoende.

a) Beräkna $P(|X_{10}| \leq 1)$

b) $E\left(\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right)^2\right)$ c) $P\left(\left|\sum_{k=1}^{10} X_k - 8\right| \leq 1\right)$

---

a) $P(|X_{10}| \leq 1) = P(-1 \leq X_{10} \leq 1) =$

$$= P\left(\frac{-1-(3/\pi)^{10}}{1} \leq \frac{X_{10}-(3/\pi)^{10}}{1} \leq \frac{1-(3/\pi)^{10}}{1}\right)$$

$$= \Phi\left(1-\left(\tfrac{3}{\pi}\right)^{10}\right) - \Phi\left(-1-\left(\tfrac{3}{\pi}\right)^{10}\right)$$

$$= 2\Phi\left(1-\left(\tfrac{3}{\pi}\right)^{10}\right) - 1$$

$$= 2\Phi(0.369) - 1$$

$$= 2 \cdot 0.6443 - 1 = \underline{\underline{0.2886}}$$

Conflict Exam
Random proc. and Embedded systems

b) $E\left(\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right)^2\right) = ?$

Kom ihåg:
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$V\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right) = \sum_{k=1}^{t} V(X_k) = \sum_{k=1}^{t} 1 = t$$

$$E\left(\sum_{1}^{t} X_k\right) = \sum_{1}^{t} E(X_k) = \underbrace{\sum_{1}^{t} \left(\tfrac{3}{\pi}\right)^k}_{\text{geom. summa}} = \frac{1-\left(\frac{3}{\pi}\right)^{t+1}}{1-\frac{3}{\pi}} - 1 =$$

$$= \frac{\frac{3}{\pi}\left(1-\left(\frac{3}{\pi}\right)^t\right)}{1-\frac{3}{\pi}}$$

$$V\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right) = E\left(\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right)^2\right) - E\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right)^2$$

$$\Rightarrow E\left(\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right)^2\right) = V\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right) + E\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right)^2$$

$$= t + \left(\frac{\frac{3}{\pi}\left(1-\left(\frac{3}{\pi}\right)^t\right)}{1-\frac{3}{\pi}}\right)^2$$

c) $P\left(\left|\sum_{k=1}^{10} X_k - 8\right| \le 1\right) =$

$\boxed{\text{kom ihåg } X_1, \dots, X_n \text{ ober. och } X_k \in N(\mu_k, \sigma) \Rightarrow \sum X_k \in N(\sum \mu_k, \sqrt{n}\,\sigma)}$

$$= P\Big(\underbrace{-1+8}_{7} \le \sum_{k=1}^{10} X_k \le \underbrace{1+8}_{9}\Big)$$

$$= P\Big(\sum^{10} X_k \le 9\Big) - P\Big(\sum^{10} X_k \le 7\Big)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{10} X_k \in N\Big(\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{3}{\pi}\right)^k, \sqrt{10}\Big) \\ \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{3}{\pi}\right)^k = \frac{\frac{3}{\pi}\left(1-\left(\frac{3}{\pi}\right)^{10}\right)}{1-\frac{3}{\pi}} = 7.828 \end{array} \right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{9-7.828}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{7-7.828}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= \Phi(0.371) - (1-\Phi(0.262))$$

$$= \underline{\underline{0.2469}}$$

Def. av stationaritet

Def Om

$$\{X_{t_1},\dots,X_{t_n}\} \overset{\mathcal{D}}{=} \{X_{t_1+h},\dots,X_{t_n+h}\}$$

för varje $t_1,\dots,t_n, n, h$

så är $\{X_t\}$ strikt stationär

Det har ingen betydelse var på tidsaxeln man bildar delföljden: om man förskjuter hela paketet h enheter är fördelningen densamma.

Ex slumpmässig fas & amplitud

$A \perp \phi, \quad A>0, \quad \phi \in U(0,2\pi)$

$f(a,\phi) = f(a)f(\phi) = f(a)\frac{1}{2\pi} \qquad a\in(0,\infty), \ \phi\in[0,2\pi]$

Låt $\{X_t\} : X_t = A\cos(t+\phi)$ beror ej av t!

Uppenbarligen har det ingen betydelse om $\phi \in U(0,2\pi)$, $U(1,2\pi+1)$ eller $U(\pi,3\pi)$ Alltså strikt stationär!

Obs! Ej sant om t.ex. $\phi \in N(0,1)$ el. $\phi\in U(0,\pi)$

2. Stationaritet

Vi har nu sett vad en stokastisk process är. Resten av kursen handlar om hur man får reda på egenskaper för s.p. och hur man analyserar s.p. i olika syften.

Momentfunktioner

Beteckn.	Innebörd	Förkortn.
$m(t)$	$E(X_t)$	vvf
$v(t)$	$V(X_t)$	vf
$r(s,t)$	$C(X_s, X_t)$	kvf
$r_{X,Y}(s,t)$	$C(X_s, Y_t)$	korskvf
$\rho(s,t)$	$\rho(X_s, X_t)$	krf

OBS! $v(t) = r(t,t)$

$$\rho(s,t) = \frac{r(s,t)}{\sqrt{v(s)\, v(t)}} \in (-1, 1)$$

$$X_s \perp X_t \; \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \; r(s,t) = 0$$

X_s, X_t starkt ber. $\Rightarrow |\rho(s,t)| \approx 1$

Def Om

$m(t)$ konstant m.a.p. t
$r(s,t) = r(s-t)$
så $\{X_t\}$ (svagt) stationär

[Obs! Strikt $\Rightarrow$ svagt
(Även svagt stat. normalpr. $\Rightarrow$ strikt)

För svagt stat. är $r(s,t) = r(s-t)$ och med $s = t+h$ är $r(t+h, t) = r(h)$.
(speciellt $r(0) = V$ och $\rho(0) = 1$)

Läs ordentligt Ex 7!

Egenskaper för kvf

a) $V(X_t) = r(0) \geq 0$
b) $V(X_{t+h} \pm X_t) = 2(r(0) \pm r(h))$
c) Symmetri: $r(-h) = r(h)$
d) "Max" i origo: $|r(h)| \leq r(0)$
e) $|r(h)| = r(0)$, $h \neq 0 \Rightarrow r$ periodisk
f) r kont. i origo $\Rightarrow$ r kont. överallt

s. 45 Slumpmässig fas & amplitud

Ex 8 A, ϕ ober.

$A > 0, \quad E(A^2) = 2\sigma^2$

$\phi \in R(0, 2\pi)$

$X_t = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

(Vinkelfrekvens: $\omega = 2\pi f$ (radianer/tidsenhet)
så $X_t = A\cos(\omega_0 t + \phi)$)

vvf $m_t = E(X_t) = E(A\cos(2\pi f_0 t + \phi))$

$= E(A)\,E(\underbrace{\cos(2\pi f_0 t + \phi)}_{g(\phi)})$

Kom ihåg $E(g(\phi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\phi(x)\,dx =$

$= \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + x) \frac{1}{2\pi}\,dx$

$= \frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi f_0 t + x)\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\sin(2\pi f_0 t + 2\pi) - \sin(2\pi f_0 t)\right)$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\sin(b + 2\pi) - \sin(b)\right) = 0$

$$\underline{\text{kvf}} \quad r(s,t) = C(X_s, X_t)$$

$$= E((X_s - \underbrace{m_s}_{=0})(X_t - \underbrace{m_t}_{=0}))$$

$$= E\Big(A\cos(\underbrace{2\pi f_0}_{=:b} s + \phi)\cdot A\cos(\underbrace{2\pi f_0}_{=:b} t + \phi)\Big)$$

$$= \underbrace{E(A^2)}_{=2\sigma^2}\ \underbrace{E(\cos(bs+\phi)\cos(bt+\phi))}_{\text{II}}$$

$$\text{II} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_\phi(x)\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(bs+x)\cos(bt+x)\,\frac{1}{2\pi}\,dx$$

Komihåg	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (1)$
	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (2)$

Ur (1) fås $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (3)$$

(1) + (3) ger $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) =$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$= 2\cos\alpha\cos\beta$$

dvs $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$

så med $\alpha = bs+x$ och $\beta = bt+x$ ...

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big(\cos(\underbrace{bs+x+bt+x}_{b(s+t)+2x}) + \cos(\underbrace{bs+x-(bt+x)}_{b(s-t)})\Big)\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big(\int_0^{2\pi}\cos(b(s+t)+2x)\,dx + \int_0^{2\pi}\cos(b(s-t))\,dx\Big)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big(\Big[\tfrac{1}{2}\sin(b(s+t)+2x)\Big]_0^{2\pi} + \cos(b(s-t))(2\pi-0)\Big)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big(\tfrac{1}{2}\sin(b(s+t)+4\pi) - \tfrac{1}{2}\sin(b(s+t)) + 2\pi\cos(b(s-t))\Big)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot 0 + \frac{1}{4\pi}2\pi\cos(b\underbrace{(s-t)}_{=\tau}) = \frac{1}{2}\cos(b(s-t))$$

varmed $r(s,t) = 2\sigma^2\,\frac{1}{2}\cos(\underbrace{b}_{2\pi f_0}(s-t)) = \underline{\underline{\sigma^2\cos(2\pi f_0\tau)}}$

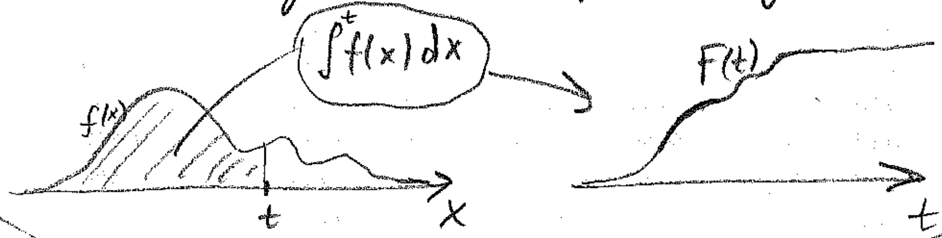
alltså svagt stationär!

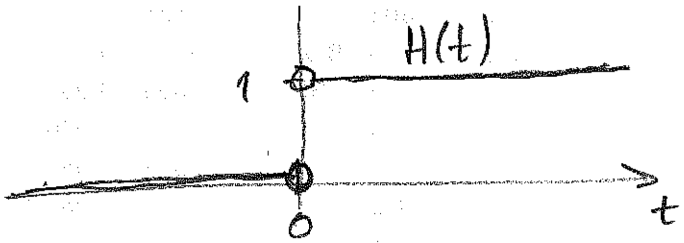
Deltafunktioner

Låt $H(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$ (Heavysidefunktionen) (en s.k. stegfunktion)

Obs! Odefinierad i $x=0$

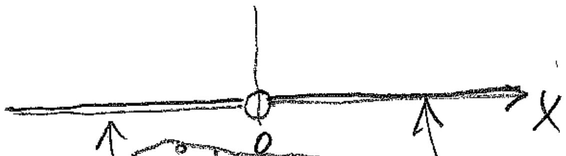
För "vanliga" kont. fkner gäller





Antag att $H(t) = \int_{-\infty}^{t} h(x)\,dx$.

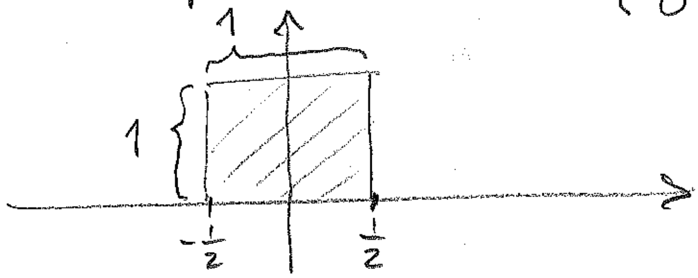
Hur ser då $h(x)$ ut?



måste vara 0 för $x<0$ ty $H(t)$ ökar ej för $t<0$

måste vara 0 efter, för $x>0$ ty $H(t)$ ökar ej för $t>0$

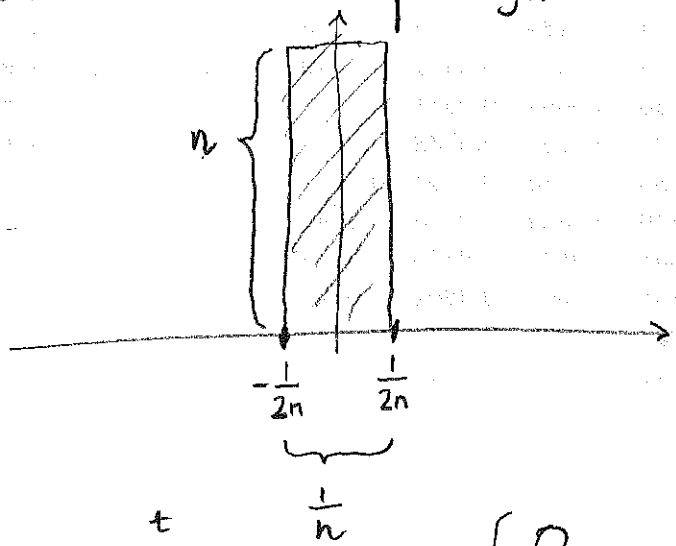
Kolla nu på $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$



och $\int^t f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2} \\ 1 & t > \frac{1}{2} \end{cases}$

Men vi behöver göra den smalare!

Kolla istället på $f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$



och $\int^t f_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2n} \\ 1 & t > \frac{1}{2n} \end{cases}$

så vi kan göra intervallet där f ej stämmer $(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ smalare genom att öka på n.

Låt nu $\delta(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

ty då är $\int^t \delta(x)\,dx = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} = H(t)$

dvs $h(x) = \delta(x)$. Denna kallas "Diracs deltafunktion", "Deltafunktionen", "Diracspiken", ...

$\int^t \delta_c(x)\,dx = \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t>c \end{cases}$

dvs $\delta_c(x) = \delta(x-c)$

Varför behövs den? Ofta behöver man definiera funktioner som styckvis konstanta el. styckvis linjära och första- resp. andra-derivatorna blir då summor av Deltafkner.

Egenskaper

$$\int_a^b \delta_c(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{om } c\in(a,b] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)\,\delta_c(x)\,dx = \begin{cases} f(c) & \text{om } c\in(a,b] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\left(\int_a^b f(x)\delta_c(x)dx \overset{x\in(a,b]}{=} \int_a^b f(c)\delta_c(x)\,dx = f(c)\int_a^b \delta_c(x)\,dx = f(c) \right)$$

Täthet för diskret variabel: $f(x) = \sum_{k=0}^{X} p(k)\,\delta_k(x)$

Ex $X \in \text{Bin}(3, 0.2)$

$p(0) = \binom{3}{0} 0.2^0 0.8^3 = 0.512$, $p(1) = \binom{3}{1} 0.2\cdot 0.8^2 = 0.384$, $p(2) = 0.096$, $p(3) = 0.008$

$f(x) = 0.512\,\delta(x) + 0.384\,\delta_1(x) + 0.096\,\delta_2(x) + 0.008\,d_3(x)$