4. Normalprocesser

Pss en normalfördelad variabel är fullständigt bestämd av väntevärde μ och varians σ^2

är en normalprocess fullständigt bestämd av vvf och kvf.

För att kunna definiera normalprocesser i allmänhet behöver vi först veta vad den flerdim. normalfördeln. är

<u>En-dim.</u> $X \in N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

UNIVARIAT

<u>Fler-dim.</u> $\mathbb{X} \in N_n(\mu, \Sigma)$

$$f(\mathbb{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbb{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbb{x}-\mu)}$$

där $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$

MULTIVARIAT

OBS! kovarianser!

Sats 1 (s. 87)

Om $\mathbb{X} \in N_n$

$C(X_i, X_j) = 0$ för alla $i \neq j$

så $X_i \perp X_j$ för alla $i \neq j$

B: (i fallet $\exists \Sigma^{-1}$)

$\forall i \neq j: C(X_i, X_j) = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

där $\sigma_{ii} = V(X_i)$

och $\det \Sigma = \prod_{i=1}^{n} \sigma_{ii}$

$$\Rightarrow (\mathbb{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbb{x} - \mu) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i)^2 / \sigma_{ii}$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbb{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbb{x}-\mu)} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sigma_{ii}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i)^2/\sigma_{ii}}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \mu_i)^2/\sigma_{ii}} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_{ii}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{ii}}(x_i - \mu_i)^2} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \square$$

Normalprocesser

Def $\{X_t\}$ är en <u>normalprocess</u> om
$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \in N_n$$
för alla $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$.

Obs $\{X_t\}$ n.pr. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i X_{t_i} \in N \quad \forall \{a_i\}, \{t_i\}$

Ex Antag $\{X_t\}$ n.pr. med vvf $= 1$ och kvf $r(\tau) = \frac{2}{1+\tau^2}$ $\Rightarrow R(f) = 2\pi e^{-2\pi|f|}$

Beräkna

a) $P(1 < X_t < 2)$

b) $P(X_t + 2X_{t+1} > 5)$

---

a) $m_t = 1$, $v_t = r(0) = 2 \Rightarrow X \in N(1, 2)$

$$\Rightarrow P(1 < X_t < 2) = \Phi\left(\frac{2-1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1-1}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= 0.7611 - 0.5 = \underline{0.2611}$$

b) $E(X_t + 2X_{t+1}) = 3$, $V(X_t + 2X_{t+1}) =$
$$= C(X_t + 2X_{t+1}, X_t + 2X_{t+1}) = V(X_t) + 2C(X_t, 2X_{t+1}) + V(2X_{t+1})$$
$$= 2 + 4\frac{2}{1+1^2} + 4 \cdot 2 = 14$$
$$P(X_t + X_{t+1} > 5) = 1 - P(X_t + X_{t+1} \le 5) =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{5-3}{\sqrt{14}}\right) = 1 - \Phi(0.53) = \underline{0.2981}$$

Stationaritet

Obs Svagt stationär n.pr. är strikt stationär.

B: klart eftersom den multivariata (flerdim.) normalfördelningen helt bestämd av väntevärde och varians som ej påverkas av translation!

Svagt stationär $\Rightarrow$

$$E(X_t) = m \quad \& \quad C(X_t, X_{t+h}) = r(h)$$

$$\Rightarrow \{ \mathbb{X}_t = [X_{t_1} \ X_{t_2} \ \cdots \ X_{t_n}]^T \} \text{ s.a.}$$

$$E(\mathbb{X}_t) = [m \ m \ \cdots \ m]^T =: \mu$$

$$[C(X_{t_i}, X_{t_j})] = \begin{bmatrix} r_0 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ r_{12} & r_0 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ r_{13} & r_{23} & r_0 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & & r_0 \end{bmatrix} =: \Sigma$$

där $r_{ij} = r(t_i - t_j)$

och $f(\mathbb{x})$ är helt bestämd av μ och Σ

$$\{ \mathbb{X}_{t+h} = [X_{t_1+h} \ X_{t_2+h} \ \cdots \ X_{t_n+h}]^T \}$$

$$E(\mathbb{X}_{t+h}) = [m \ m \ \cdots \ m]^T = \mu$$

$$[C(X_{t_i+h}, X_{t_j+h})] = \begin{bmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{bmatrix}$$ där $r_{ij} =$
$= r(t_i + h - (t_j + h)) =$
$= r(t_i - t_j)$ dvs Σ $\square$

Wienerprocessen

Def En s.pr. $\{X_t\}$ Wienerprocess (W.pr.) om

1) $X_0 = 0$

2) $X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_3} - X_{t_2}$, ... ober.
för alla $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$

3) $X_{t+h} - X_t \in N(0, \sigma\sqrt{h})$

Obs! W.pr. ej deriverbar!
(Inga processer med ober. ökningar är deriverbara)
Ej heller stationär! (se ex. 7)

M.h.a. W.pr.:er kan stationär processer konstrueras!
(se Ex 9, s. 96 och följande exempel)

I diskret tid kan W-pr. representeras

$W_t = \sum_{k=1}^{t} Z_k$ där $\{Z_k\}$ ober., $Z_k \in N(0, \sigma)$

$X_t = W_{t+1} - W_t$ där $\{W_t\}$ W-pr. (1)

Är $\{X_t\}$ strikt stationär? (kont. tid!)

Klart att $m = E(X_t) = 0$

$$X_t = W_{t+1} - W_t \in N(0, \overset{=1}{\tilde{\sigma}}\sqrt{t+1-1}) = N(0,1)$$

$$C(X_s, X_t) = 0 \text{ då } |s-t| > 1$$

$$C(W_s, W_t) = \min(s,t)$$

$$\begin{aligned}
r(s,t) &= C(X_s, X_t) \\
&= C(W_{s+1} - W_s,\ W_{t+1} - W_t) \\
&= C(W_{s+1}, W_{t+1}) - C(W_{s+1}, W_t) - C(W_s, W_{t+1}) + C(W_s, W_t) \\
&= \min(s+1, t+1) - \min(s+1, t) - \min(s, t+1) + \min(s,t) \\
&= 1 + 2\min(s,t) - \min(s+1,t) - \min(s,t+1) \\
&= \begin{cases} 1 + 2s - (s+1) - s & s+1 \leq t \\ 1 + 2s - t - s & s \in (t-1, t) \\ 1 + 2s - t - s & s = t \\ 1 + 2t - t - s & s \in (t, t+1) \\ 1 + 2t - t - (t+1) & s \geq t+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & s-t \leq -1 \text{ eller } s-t \geq 1 \\ 1 + s - t & s \in (t-1, t] \\ 1 + t - s & s \in (t, t+1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - |s-t| & |s-t| \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}
\end{aligned}$$

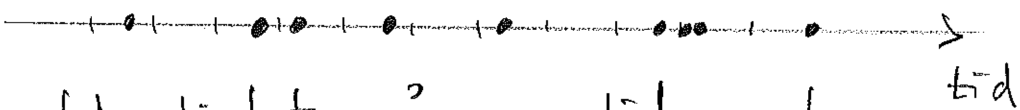
svagt stat.
ty $r(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau| & |\tau| \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
så svagt & norm.pr.
$\Rightarrow$ Ja! strikt

Man kan nämna också att om man låter en "kvadrerad normalprocess" dvs $Y_t = X_t^2$ där $m_X(t) = 0$ så blir $\{Y_t\}$ en χ^2-process

M.h.a. n.pr:er kan man konstruera andra processer (se Ex 10 & 11, s. 97-98)

Hagelbrus (Shot noise)

I ett elektronrör sker strömpulser



stokastiskt på en tidsaxel: $\ldots, \tau_1, \tau_2, \ldots$

Varje strömpuls avklingar på ett eller annat sätt (enl. funktionen g) med tiden så att strömmen vid tid t blir $X_t = \sum g(t - \tau_k)$.

Om man antar att strömpulserna sker vid tidpkter enl. Po-pr.(λ) fås att

$m(t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du$ konstant m.a.p. t

(se räkningar s. 99–100). T.ex. med

$\lambda = 100$ och $g(t) = \begin{cases} 0.1t & 0 \le t \le 5 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ fås

$m(t) = 100 \int_0^5 0.1u\,du = 10\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^5 = 125.$

$\boxed{\text{s.101 om kvf.}}$