5. Filtrering

Manipulering för att urskilja signalen.

<u>Linjärt</u> system S om $S(ax_1+bx_2)=aS(x_1)+bS(x_2)$

Antag $\{X_t\}$ insignal och $\{Y_t\}$ filtrerad signal

Då är exempel på linjära, tidsinvarianta filter:

$\{X_t\} \rightsquigarrow \{Y_t\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{X_{t+h}\} \rightsquigarrow \{Y_{t+h}\}$

$$Y_t = X_{t-c}$$

$$Y_t = X_t'$$

$$Y_t = \sum_{k=0}^{p} a_k X_t^{(k)}$$

$$Y_t = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)X_u\,du & \text{om kont. tid} \\ \sum_{u=-\infty}^{\infty} h(t-u)X_u & \text{om diskret tid} \end{cases}$$

<u>Sats 1</u> (s. 106)

<u>Om</u> $\{X_t\}$ svagt stationär

r_X kont.

g begränsad och integrerbar på $[a,b]$

<u>så</u> $E\left(\int_a^b g(t)X_t\,dt\right) = m_X \int_a^b g(t)\,dt$

$$\left(E\left(\int_a^b g(s)X_s\,ds \cdot \int_c^d h(t)X_t\,dt\right) = \int_a^b\int_c^d g(s)h(t)E(X_sX_t)\,dt\,ds \right)$$

$$C\left(\int_a^b g(s)X_s\,ds,\ \int_c^d h(t)X_t\,dt\right) = \int_a^b\int_c^d g(s)h(t)r_X(s-t)\,dt\,ds$$

Impulssvar

Om $Y_t = \mathcal{S}(X_t)$ där $\mathcal{S}$ linjärt, tidsinvariant
så finns $h : T \to \mathbb{R}$ sådan att

$$Y_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) X_u \, du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X_{t-u} \, du$$

Denna funktion h kallas systemets impulssvar
(Den karakteriserar det filter som systemet utgör)

Om $h(u) = 0$ då $u < 0$ kallas imulssvaret
kausalt (eftersom det innebär att den filtrerade
signalen vid tidpkt t, Y_t, bara beror på
$\{X_s\}$ fram till tidpkt t.)

Obs! Enlig reglerna för generaliserade
funktioner är $\int f'(x)\,\delta(x)\,dx = \int f(x)\,\delta'(x)\,dx$ så
om man låter $h = \delta'$ fås att den filtrerade signalen

$$Y_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X_{t-u} \, du = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(u) X_{t-u} \, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(u) X'_{t-u} \, du = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-u) X'_u \, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_t(u) X'_u \, du = X'_t \quad \text{(derivatan av insignalen!)}$$

Samband mellan $m_X - m_Y$ och $r_X - r_Y$ och spektr.

Sats 2 Om $\{X_t\}$ svagt stationär

$\{Y_t\}$ filtreringen m.h.a. h

Så

(direkt följd av sats 1)

$$m_Y = \begin{cases} m_X \sum_{u=-\infty}^{\infty} h(u) & T \text{ diskret} \\ m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,du & T \text{ kont.} \end{cases}$$

$$r_Y(\tau) = \begin{cases} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\, r_X(\tau+u-v) & T \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\, r_X(\tau+u-v)\,du\,dv & T \text{ kont.} \end{cases}$$

$$R_Y(f) = |H(f)|^2 R_X(f)$$ ...men vad är H...?

Fouriertransformen av filtrets impulssvar h, H kallas filtrets frekvensfunktion:

$$H(f) = \begin{cases} \sum_{u=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f u} h(u) & \text{om } T \text{ diskret} \\ \quad \text{där } f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f u} h(u)\,du & \text{om } T \text{ kont.} \\ \quad \text{där } f \in \mathbb{R} & \end{cases}$$

varmed (antag kont. tid)

$$r_Y(\tau) = \int_u \int_v h(u)h(v) \underbrace{r_X(\tau+u-v)}_{\text{kan spektralframställas}} \,du\,dv$$

$$= \int_u \int_v h(u)h(v) \left(\int \underbrace{e^{i2\pi f(\tau+u-v)}}_{e^{i2\pi f\tau} e^{i2\pi f u} e^{-i2\pi f v}} R_X(f)\,df \right) du\,dv$$

$$= \int_f e^{i2\pi f\tau} \left(\int_u h(u) e^{i2\pi f u}\,du \right) \left(\int_v h(v) \underbrace{e^{-i2\pi f v}}_{\text{konjugatet av } e^{i2\pi f v}} dv \right) R_X(f)\,df$$

$$= \int_f e^{i2\pi f\tau} H(f)\overline{H(f)} R(f)\,df = \int_f e^{i2\pi f\tau} \underbrace{|H(f)|^2 R_X(f)}\,df$$

$$\Rightarrow R_Y = |H|^2 R_X$$

Sats 3 (Samband mellan vvf, kvf och spektrum)

Om $\{X_t\}$ stationär (svagt?)

med vvf m_X, kvf $r_X(\tau)$, spekr. $R_X(f)$

Filtret linjärt med impulssvar h

Så $m_Y = H(0)\, m_X$

$$r_Y(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi f\tau} |H(f)|^2 R_X(f)\, df$$

OBS!

$$R_Y(f) = |H(f)|^2 R_X(f)$$

Ex I exemplet med $X_t = W_{t+1} - W_t$, vad blir R_Y om $h(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$?

(Y filtrering en med impulssvaret)

Är filtret kausalt?

Vi beräknade $r_X(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Detta innebär att $r_X = \begin{cases} 1 - \alpha|\tau| & |\tau| \le \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

med $\alpha = 1$ varmed

$$R_X = \begin{cases} 1 & \text{om } f = 0 \\ \frac{1}{2(\pi f)^2}\left(1 - \cos(2\pi f)\right) & \text{om } f \neq 0 \end{cases}$$

(se räkn.)

$$h(t) = \begin{cases} c & |t| \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Antag

$$G(f) = \begin{cases} 1 & |f| \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \Rightarrow g(\tau) = \begin{cases} 2 & \tau = 0 \\ \frac{\sin 2\pi\tau}{\pi\tau} & \text{annars} \end{cases}$$

Enl. -satsen gäller då

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \Rightarrow H(f) = g(-f) =$$

$$= \begin{cases} 2 & f = 0 \\ \frac{\sin(2\pi(-f))}{\pi(-f)} & \text{annars} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 & f = 0 \\ \frac{\sin 2\pi f}{\pi f} & \text{annars} \end{cases}$$

Nu är $R_Y(f) = |H(f)|^2 R_X(f) =$

$$= \begin{cases} 2^2 \cdot 1 & \text{om } f = 0 \\ \left(\frac{\sin 2\pi f}{\pi f}\right)^2 \frac{1-\cos 2\pi f}{2(\pi f)^2} & \text{annars} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4 & f = 0 \\ \frac{\sin^2 2\pi f\,(1-\cos 2\pi f)}{2(\pi f)^4} & \text{annars} \end{cases}$$

Filtret kausalt? Nej, ty $h(t) =$
$= 1$ för $-1 \leq t \leq 1$ så t.ex. $h(-1) = 1 \neq 0$.

Först och främst $1-|\tau| = \begin{cases} 1+\tau & \text{om } \tau < 0 \\ 1-\tau & \text{om } \tau \geq 0 \end{cases}$

$$R_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} r_x(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-i2\pi f\tau}(1-|\tau|)\, d\tau$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau + \left(\int_{-1}^{0} \tau e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau + \int_{0}^{1} (-\tau) e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \right)$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{-1}^{0} \tau e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau}_{\mathrm{II}} - \underbrace{\int_{0}^{1} \tau e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau}_{\mathrm{III}}$$

Eulers formler:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

$$\mathrm{I} = \left[-\frac{e^{-i2\pi f\tau}}{i2\pi f} \right]_{-1}^{1} = -\frac{e^{-i2\pi f}}{i2\pi f} + \frac{e^{i2\pi f}}{i2\pi f} = \frac{\sin 2\pi f}{\pi f}$$

För beräkning av II och III först prim. fkn.

$$\int \tau e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau = \left\{ \begin{matrix} u = \tau & dV = e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \\ du = d\tau & V = -\frac{e^{-i2\pi f\tau}}{i2\pi f} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\tau \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{i2\pi f} + \int \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{i2\pi f}\, d\tau = -\tau \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{i2\pi f} + \left(-\frac{e^{-i2\pi f\tau}}{(i2\pi f)^2} \right)$$

$$= -\tau \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{i2\pi f} + \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{(2\pi f)^2}$$

$$\mathrm{II} = \left[-\tau \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{i2\pi f} + \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{(2\pi f)^2} \right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 + \frac{1}{(2\pi f)^2} - \left(-(-1)\frac{e^{i2\pi f}}{i2\pi f} + \frac{e^{i2\pi f}}{(2\pi f)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi f)^2} - \frac{e^{i2\pi f}}{i2\pi f} - \frac{e^{i2\pi f}}{(2\pi f)^2}$$

$$\mathrm{III} = \left[-\tau \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{i2\pi f} + \frac{e^{-i2\pi f\tau}}{(2\pi f)^2} \right]_{0}^{1}$$

$$= -1 \cdot \frac{e^{-i2\pi f}}{i2\pi f} + \frac{e^{-i2\pi f}}{(2\pi f)^2} - \left(-0 + \frac{1}{(2\pi f)^2} \right)$$

$$= -\frac{e^{-i2\pi f}}{i2\pi f} + \frac{e^{-i2\pi f}}{(2\pi f)^2} - \frac{1}{(2\pi f)^2}$$

$$R_x(f) = \mathrm{I} + \mathrm{II} - \mathrm{III}$$

$$= \frac{\sin 2\pi f}{\pi f} + \frac{1}{(2\pi f)^2} - \frac{e^{i2\pi f}}{i2\pi f} - \frac{e^{i2\pi f}}{(2\pi f)^2} - \left(-\frac{e^{-i2\pi f}}{i2\pi f} + \frac{e^{-i2\pi f}}{(2\pi f)^2} - \frac{1}{(2\pi f)^2} \right)$$

$$= \frac{\sin 2\pi f}{\pi f} + \frac{2}{(2\pi f)^2} - \underbrace{\frac{e^{i2\pi f} - e^{-i2\pi f}}{i2\pi f}}_{\sin(2\pi f)/\pi f} - \frac{e^{i2\pi f} + e^{-i2\pi f}}{(2\pi f)^2}$$

$$= \frac{2}{(2\pi f)^2} - \frac{\cos(2\pi f)}{2(\pi f)^2} = \frac{1 - \cos 2\pi f}{2(\pi f)^2}$$