3. Spektralframställning

För varje kont. kvf r finns <u>entydigt</u> en <u>symmetrisk</u> täthetsfunktion R s.a.

$\boxed{R \text{ är F-transf. av } r}$

R kallas <u>spektraltätheten</u>.

(sats 1, s. 62)

Detta innebär att om r är kvf till svagt stationär process $\{X_t\}$ så finns en symmetrisk integrerbar funktion R s.a.

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} R(f)\,df \quad \left(\begin{array}{l}\text{spektral-}\\ \text{framställn. av } r\end{array}\right)$$

Detta är Fouriers inverstransform och skrivs $r = \mathcal{F}^{-1}(R)$

<u>Anm</u> • $V(X_t) = r(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(f)\,df$

(• Om $E(X_t) = 0$ så <u>medeleffekten</u> $E(X_t^2) = r(0)$)

• $r(\tau) = 2\int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau)\,R(f)\,df \quad \left(\begin{array}{l}\text{eftersom}\\ r \text{ är reell}\end{array}\right)$

• f i spektraltätheten tolkas som frekvens

		Kvf (tidssidan) kont.	Kvf (tidssidan) diskret
Spektrum (frekvenssidan)	kont.	1	3
	diskret	2	4

1 Kont. spektrum (kont. tid)

Om r kont. kvf, $\int |r| < \infty$

så R kont. och $= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} r(\tau)\, d\tau$

(Detta är Sats 2)

Eftersom R kont. så kallas spektrum kont.

Obs. $\boxed{r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} R(f)\, df \quad R \text{ pos. symm. integrerbar}} \Rightarrow \boxed{r \text{ kvf för ngn stationär pr.}}$

Därmed har vi sammanfattningsvis:

Sats 1, 2, 3

$$\left\{ \begin{array}{l} r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} R(f)\, df \\ R \text{ pos., sym., integrerbar} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \text{ kvf för någon stationär stok. pr.} \end{array} \right\}$$

$r = \mathcal{F}^{-1}(R)$

Om dessutom r kont., $\int |r| < \infty$

så $R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} r(\tau)\, d\tau$

$R = \mathcal{F}(r)$

$$G(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} G(f)\, df =$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{i2\pi f\tau} \cdot 1\, df = \left[\frac{e^{i2\pi f\tau}}{i2\pi\tau} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{e^{i2\pi\tau} - e^{-i2\pi\tau}}{i2\pi\tau} = \frac{\sin 2\pi\tau}{\pi\tau}$$

(obs! Tryckfel i boken)

2 Processer med diskret spektrum (kont. tid)

Spektrum diskret $\Rightarrow$ $R(f) = \sum_k b_k \delta_{f_k}(f)$

varmed motsvarande kvf

$$r(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{i 2\pi f_k \tau}$$

$$\overset{\text{symm.}}{=} b_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(2\pi f_k \tau)$$

$\left(\text{speciellt } V(X_t) = b_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$

(forts. Ex 5 s. 38)

Ex 6 $X_t = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$, $V(X_t) = \sigma^2$

Beräkna kvf och spektraltäthet.

Diskret spektrum innebär att spektraltätheten $R(f)$ är diskret, i detta fall bara i $\pm f_0$:

$$R(f) = c\,(\delta_{-f_0}(f) + \delta_{f_0}(f))$$

Vet $\sigma^2 = r(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(f)\,df =$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty} (\delta_{-f_0}(f) + \delta_{f_0}(f))\,df = c(1+1) = 2c$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sigma^2}{2} \text{ dvs } \underline{\underline{R(f) = \frac{\sigma^2}{2}\left(\delta_{-f_0}(f) + \delta_{f_0}(f)\right)}}$$

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} R(f)\,df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} \frac{\sigma^2}{2}\left(\delta_{-f_0}(f) + \delta_{f_0}(f)\right) df$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau}\delta_{-f_0}(f)\,df + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau}\delta_{f_0}(f)\,df\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\left(e^{i2\pi(-f_0)\tau} + e^{i2\pi f_0\tau}\right)$$

$$= \sigma^2 \cdot \frac{e^{-i2\pi f_0\tau} + e^{i2\pi f_0\tau}}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{kom ihåg Eulers formel:} \\ \cos\theta = \dfrac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2}\end{array}\right\}$$

$$= \underline{\underline{\sigma^2 \cos(2\pi f_0 \tau)}}$$

Ex 7 forts. på Ex 9 s. 47 (läs själva)

I tabellen finns listade transformer $g(\tau)$ med motsvarande $G(f)$.

Men antag nu att $h(\tau) = G(\tau)$, vad blir då $H(f)$?

♛ -sats

<u>Om</u> $G = \mathcal{F}(g)$	<u>Om</u> $g = \mathcal{F}^{-1}(G)$
$h(\tau) \equiv G(\tau)$	$H(f) \equiv g(f)$
<u>så</u> $H(f) \equiv g(-f)$	<u>så</u> $h(\tau) \equiv G(-\tau)$

<u>B:</u> Antag $G = \mathcal{F}(g)$. Då är

$$g(-\tau) = \mathcal{F}^{-1}(G)(-\tau)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f(-\tau)} G(f)\,df$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} G(f)\,df$$

dvs $g(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} G(\tau)\,d\tau = \mathcal{F}(G)(f)$

Om nu $h(\tau) \equiv G(\tau)$ så är

$H(f) = \mathcal{F}(h)(f) = \mathcal{F}(G)(f) = g(-f)$.

Omvänt: $G(-f) = \mathcal{F}(g)(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} g(\tau)\,d\tau$

så $G(-\tau) = \mathcal{F}^{-1}(g)(\tau)$. Om nu $H(f) \equiv g(f)$

är $h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(H)(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(g)(\tau) = G(-\tau)$. $\square$

Spektrum då man har diskret tid

Sats 5 om $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ svagt stationär

så $R : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$

R symm. på $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$r(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi f\tau} R(f)\,df$$

(3) Processer med kont. spektrum (diskret tid)

F-transformen

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} R(f)\,df \quad \text{(psss förut)}$$

men inversionsformeln blir

$$R(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\tau} r(\tau) \quad \text{om } \sum |r(\tau)| < \infty$$

Antag $\begin{cases} X_0 \in N(0,1) \\ X_t = 0.5X_{t-1} + Z_t & t \geq 1 \end{cases}$ svagt stationär

där $Z_t \in N(0, \sqrt{0.75})$, $\{Z_t\}$ ober., och ober. av X_0

Beräkna kvf, R(0) och visa spektrum reellt.

<u>kvf</u> (se föreläsn. 2, ex 3a)

$$r(\tau) = \phi^{|\tau|}\sigma_X^2 \quad \text{där } \phi = 0.5$$

$\{X_t\}$ svagt stationär $\Rightarrow$ $E(X_t) = m$

och $C(X_s, X_t) = r(\underbrace{s-t}_{\tau})$ så speciellt

är $V(X_t) = r(0)$ ober. av t, kalla σ_X^2

$$\sigma_X^2 = V(0.5X_{t-1} + Z_t)$$

$$= 0.5^2 V(X_{t-1}) + V(Z_t)$$

$$= 0.25\,\sigma_X^2 + (\sqrt{0.75})^2$$

$$\sigma_X^2(1 - 0.25) = 0.75$$

$$\sigma_X^2 = 1$$

varmed $r(\tau) = 0.5^{|\tau|} = 2^{-|\tau|}$

spektr. $R(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} 2^{-|\tau|}$

$$= \sum_{\tau=-\infty}^{-1} e^{-i2\pi f\tau} 2^{\tau} + 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} 2^{-\tau}$$

$$= \sum_{\tau=1}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} 2^{-\tau} + 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau} 2^{-\tau}$$

$$= 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} 2^{-\tau}\left(e^{i2\pi f\tau} + e^{-i2\pi f\tau}\right)$$

$$= 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} 2^{-\tau+1} \frac{e^{i2\pi f\tau} + e^{-i2\pi f\tau}}{2}$$

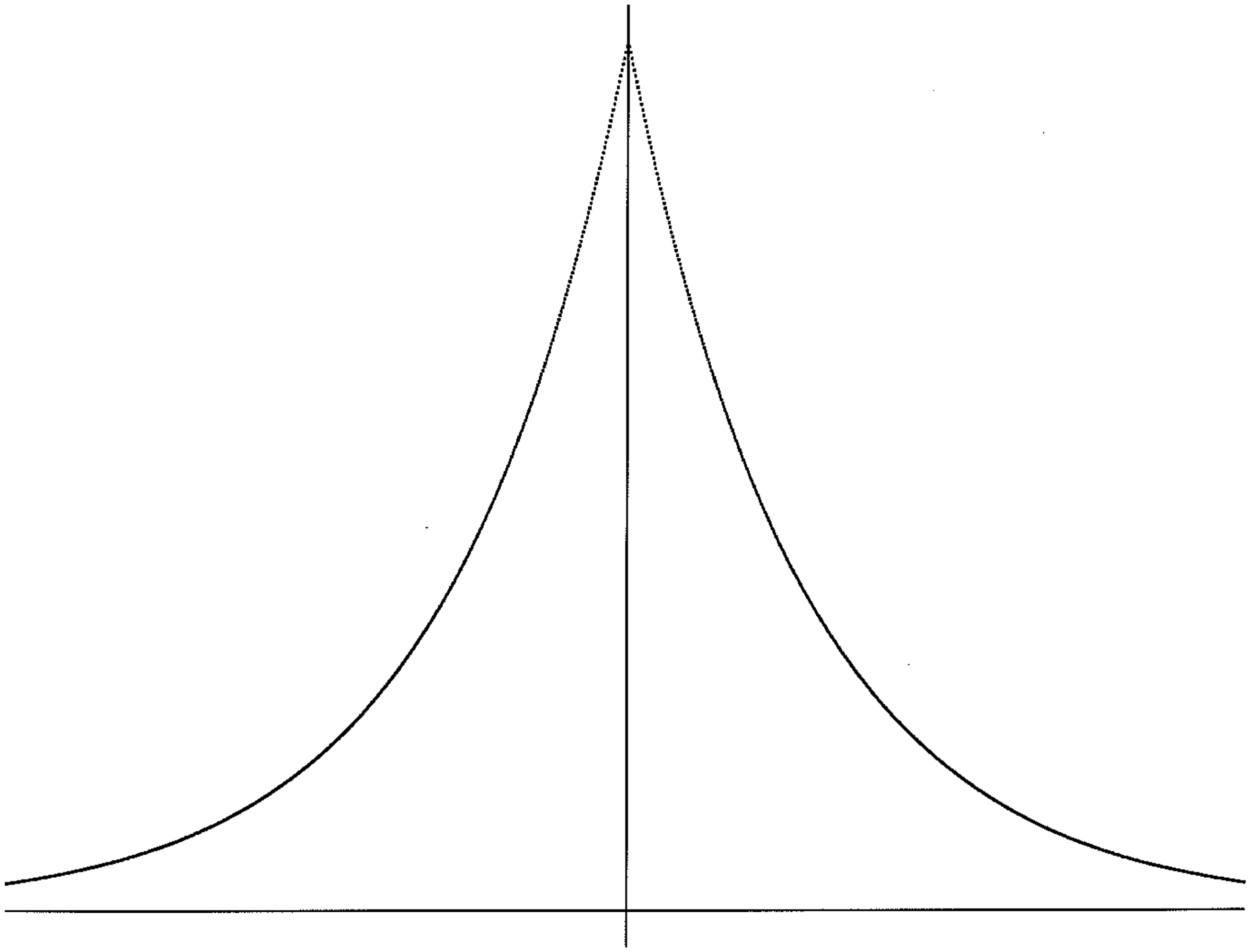
$$= 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} 2^{-\tau+1} \cos(2\pi f\tau), \quad -\tfrac{1}{2} < f \leq \tfrac{1}{2}$$

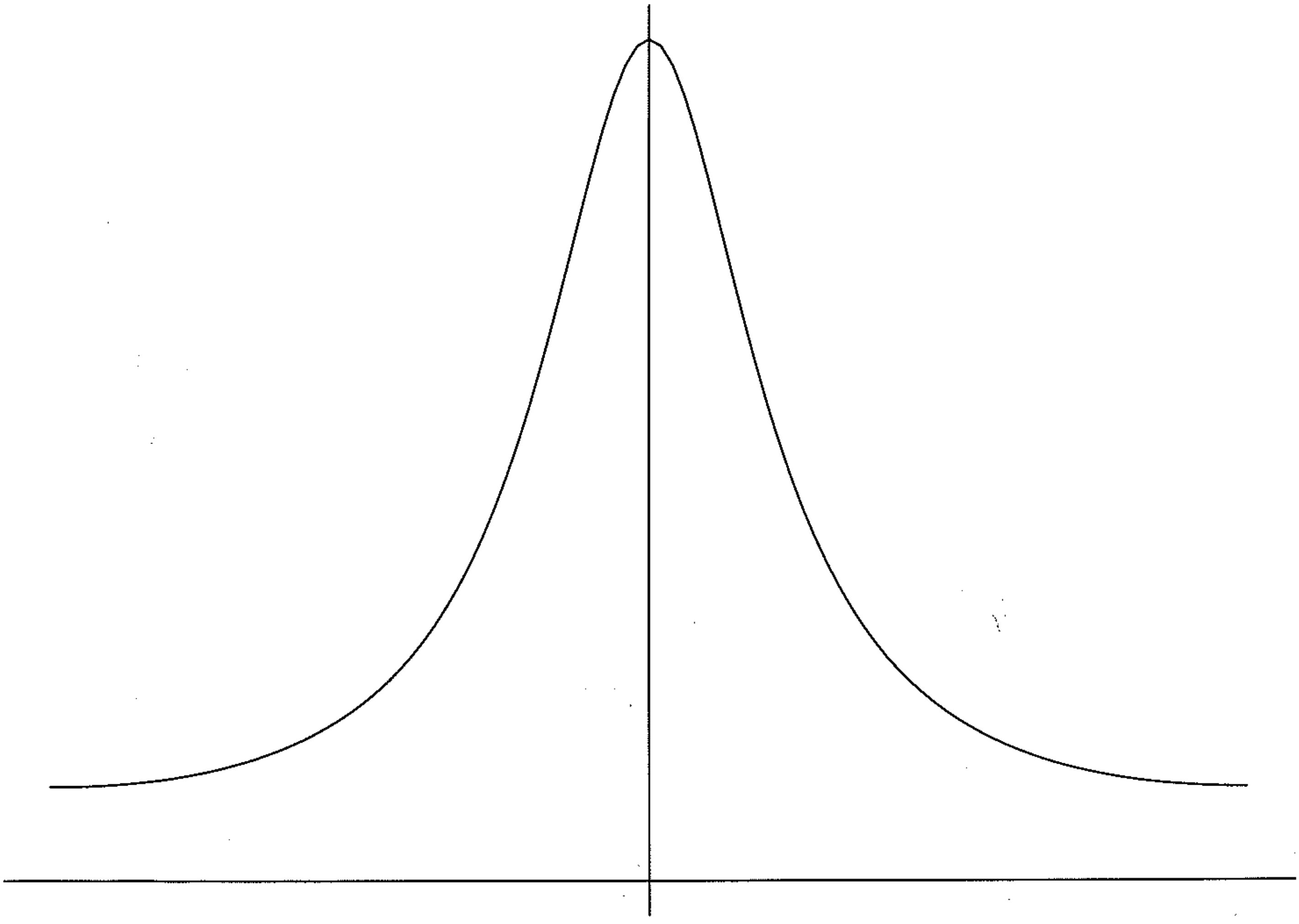
som är reell!

Speciellt $R(0) = 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} 2^{-\tau+1} = 1 + \sum_{\tau=0}^{\infty} 2^{-\tau} =$

$$= 1 + \frac{1}{1-2^{-1}} = 1 + \frac{2}{2-1} = 3$$

~~OBS! Tryckfel i boken på F-transf. s. 208~~





Ex Låt

$$R(f) = \begin{cases} \alpha(1-\alpha|f|) & f \in (-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

för $\alpha > 0$ vara kont. spektrum.

Beräkna kvf i kont. tid.

$$R(f) = \begin{cases} \alpha(1-\alpha|f|) & f \in (-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}),\ \alpha > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

pos: $\alpha(1-\alpha|f|) \geq 0 \iff 1-\alpha|f| \geq 0 \iff$

$\iff \alpha|f| \leq 1$ men $\alpha|f| \leq \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$

symm: $R(-f) = \alpha(1-\alpha|-f|) = \alpha(1-\alpha|f|) = R(f)$

integr.: Klart att $R(f) \geq 0$

Vidare är $\max_f R(f) = R(0) = \alpha$ så begr.

Varmed $\int_{-\infty}^{\infty} R \leq \int_{-1/\alpha}^{1/\alpha} \alpha < \infty$

Därmed finns r kvf för någon stok. pr.

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau} R(f)\,df = 2\int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) R(f)\,df =$$

$$= 2\int_0^{1/\alpha} \cos(2\pi f\tau)\,\alpha(1-\alpha\overbrace{|f|}^{=f})\,df =$$

$$= \underbrace{2\alpha\int_0^{1/\alpha} \cos(2\pi f\tau)\,df}_{=\mathrm{I}} - \underbrace{2\alpha^2\int_0^{1/\alpha} f\cos(2\pi f\tau)\,df}_{\mathrm{II}}$$

$$I = \left[\frac{\sin(2\pi f \tau)}{2\pi\tau} \right]_0^{1/\alpha} = \frac{\sin(2\pi\tau/\alpha)}{2\pi\tau} - 0$$

$$II = \int_0^{1/\alpha} f \cos(2\pi f \tau)\, df = \left\{ \begin{matrix} \text{P.I.} & \\ u = f & dV = \cos(2\pi f\tau)\, df \\ du = df & V = \dfrac{\sin(2\pi f \tau)}{2\pi\tau} \end{matrix} \right\} =$$

$$= uV - \int V\,du = \left[f \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi\tau} \right]_0^{1/\alpha} - \int_0^{1/\alpha} \frac{\sin(2\pi f \tau)}{2\pi\tau}\, df =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin(2\pi\tau/\alpha)}{2\pi\tau} - 0 - \frac{1}{2\pi\tau}\left[- \frac{\cos(2\pi f\tau)}{2\pi\tau} \right]_0^{1/\alpha} =$$

$$= \frac{\sin(2\pi\tau/\alpha)}{2\pi\tau\alpha} + \frac{1}{2\pi\tau}\left(\frac{\cos(2\pi\tau/\alpha)}{2\pi\tau} - \frac{1}{2\pi\tau} \right)$$

$$= \frac{\sin(2\pi\tau/\alpha)}{2\pi\tau\alpha} + \frac{\cos(2\pi\tau/\alpha)}{(2\pi\tau)^2} - \frac{1}{(2\pi\tau)^2}$$

$$r(\tau) = 2\alpha I - 2\alpha^2 II$$

$$= \frac{\alpha \sin(2\pi\tau/\alpha)}{\pi\tau} - \left(\frac{\alpha \sin(2\pi\tau/\alpha)}{\pi\tau} + \frac{\alpha^2 \cos(2\pi\tau/\alpha)}{2\pi^2\tau^2} - \frac{\alpha^2}{2\pi^2\tau^2} \right)$$

$$= \frac{\alpha^2(1 - \cos(2\pi\tau/\alpha))}{2\pi^2\tau^2}$$

Obs! $r(0) = ?$ $\displaystyle \lim_{\tau \to 0} r(\tau) = \alpha^2 \lim_{\tau\to 0} \frac{1-\cos(2\pi\tau/\alpha)}{2\pi^2\tau^2} = \{x = 2\pi\tau/\alpha\}$

$$= 2\alpha^2 \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2\alpha^2} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \right)}{x^2} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \ldots}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Läs exemplen s. 65–71