Tidsserier AR och MA

Om man har stora komplicerade system med massor av processer och filter och låter allting vara beroende utan inskränkning blir analysen <u>övermänsklig</u>!

Om istället gör oberoendeantaganden i konstruktionen av processer kan analysen förenklas avsevärt.

Två sådana är AR och MA
Auto-Regressive, Moving Average

Inte desto mindre kan beroendestrukturen i systemet skattas och AR-MA-modeller tillämpas och <u>approximativt</u> motsvara den exakta modellen! (se s. 116)

Tillämpningar inom bl. a. reglerteknik.

DISKRET TID

Låt $\{\varepsilon_t\}$ vara vitt brus dvs, $T = \mathbb{Z}$

$E(\varepsilon_t) = 0$

$C(\varepsilon_t) = \begin{cases} \sigma^2 & s = t \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Då är $R_\varepsilon(f) = \begin{cases} \sigma^2 & f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

AR(p) - process

Låt $A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$

(där $a_0 = 1$)

Då kallas $z^p A(\frac{1}{z}) = 0$ dvs

$z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \dots + a_{p-1} z + a_p = 0$

den karakteristiska ekvationen (kar. ekv.).

$A(z)$ kallas stabilt (polynom) om rötterna till den kar. ekv. ligger på den öppna enhetsskivan, dvs $|z_k| < 1$.

Def Låt $A(z)$ vara stabilt, grad $A = p$

$\{X_t\}$ stationär

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{p} a_k X_{t-k}$$

Om $\{\varepsilon_t\}$ vitt brus och $C(\varepsilon_t, X_s) = 0$ för alla t, $s < t$ så $\{X_t\}$ AR(p)-pr.

OH

Obs! $\{X_t\}$ AR(p) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow X_t = \sum_{k=1}^{p} b_k X_{t-k} + \varepsilon_t \quad (\text{där } b_k = -a_k)$$

dvs den t:te variabeln kan representeras m.h.a de p föregående värdena

EX Låt $\{X_t\}$ vara en AR(1)-process och $V(X_t) = 1$. Beräkna $V(\varepsilon_t)$. Vad innebär sambandet?

$$\{X_t\} \text{ AR(1)} \Rightarrow X_t = b X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$1 = V(X_t) = V(b X_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$= b^2 \underbrace{V(X_{t-1})}_{=1} + V(\varepsilon_t)$$

$$\Rightarrow 1 = b^2 + V(\varepsilon_t)$$

varmed $V(\varepsilon_t) = 1 - b^2$

Ju större $|b|$, desto starkare beroende. Men för att $V(X_t) = 1$ måste $|b| < 1$!

(I allmänhet $V(X_t) = \sigma_X^2 \Rightarrow V(\varepsilon_t) = \sigma_X^2(1-b^2)$)

Sats 4 (Yule-Walker)

Om $\{X_t\}$ $AR(p)$

så $m_X = 0$

$$R_X(f) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{|A(e^{-i2\pi f})|^2}$$

där $A(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$, $a_0 = 1$

$r_X(\tau)$ satisfierar $\sum_{k=0}^{p} a_k r_X(\tau - k) = \begin{cases} 0 & k=1,2,\dots \\ \sigma_\varepsilon^2 & k=0 \end{cases}$

(ekvationssystem som kallas Yule-Walker-ekv.)

B: Enl. def. av $AR(p)$-process är $\{\varepsilon_t\}$ def:ad av $\varepsilon_t := \sum_{k=0}^{p} a_k X_{t-k}$, $t \in \mathbb{Z}$. där $a_0 = 1$

Det. av linjärt filter (diskret tid) var

$$Y_t = \sum_{u=-\infty}^{\infty} h(u) X_{t-u}$$

Dvs $\{\varepsilon_t\}$ är filtreringen av $\{X_t\}$ med impulssvaret $h(k) = \begin{cases} a_k & \text{om } 0 \le k \le p \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$\Rightarrow H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi fk} h(k) = \sum_{k=0}^{p} e^{-i2\pi fk} a_k$$

varmed $R_\varepsilon(f) = |H(f)|^2 R_X(f)$

$$\text{så} \quad R_X(f) = \frac{1}{|H(f)|^2} R_\varepsilon(f)$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\left|\sum_{k=0}^{p} a_k e^{-i2\pi f k}\right|^2}$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\left|A(e^{-i2\pi f})\right|^2} \quad \text{där } a_0 = 1 \text{ i } A(\cdot)$$

För att visa att kvf uppfyller Y-W-ekv. ta kovariansen av $X_{t-\tau}$ och båda led i definitionen av AR(p)-process:

$$\text{V.L.} = C(X_{t-\tau}, \varepsilon_t) = C\Big(X_{t-\tau}, \sum_{k=0}^{p} a_k X_{t-k}\Big) = \text{H.L.}$$

Kom ihåg: $X_t = \sum_{k=1}^{p} b_k X_{t-k} + \varepsilon_t$ där $\boxed{\varepsilon_t \perp X_{t-k},\ k \geq 1}$

$\Rightarrow \quad C(X_{t-\tau}, \varepsilon_t) = 0$ då $\tau \geq 1$ och

då $\tau = 0$ $\quad C(X_{t-\tau}, \varepsilon_t) = C(X_t, \varepsilon_t) =$

$$= C\Big(\sum_{k=1}^{p} b_k X_{t-k} + \varepsilon_t, \varepsilon_t\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_k \underbrace{C(X_{t-k}, \varepsilon_t)}_{=0} + C(\varepsilon_t, \varepsilon_t)$$

$$= V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{och} \quad \text{H.L.} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k C(X_{t-\tau}, X_{t-k}) = \sum_{k=0}^{p} a_k r_X(\tau - k) \qquad \square$$

s. 42 ⟶ ty r symm. $r(-\tau) = r(\tau)$.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1.8, \quad a_2 = 0.9$$

$$\text{Y-W}: \begin{cases} \tau = 0: r_X(0) - 1.8 r_X(-1) + 0.9 r_X(-2) = \sigma_\varepsilon^2 \\ \tau = 1: r_X(1) - 1.8 r_X(0) + 0.9 r_X(-1) = 0 \\ \tau = 2: r_X(2) - 1.8 r_X(1) + 0.9 r_X(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 r_0 - 18 r_1 + 9 r_2 = 10 \sigma_\varepsilon^2 \\ -18 r_0 + 19 r_1 = 0 \\ 9 r_0 - 18 r_1 + 10 r_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 r_0 - 18 r_1 + 9 r_2 = 10 \sigma_\varepsilon^2 \\ -18 r_0 + 19 r_1 = 0 \\ 19 r_0 - 18 r_1 = 100 \sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 r_0 - 18 r_1 + 9 r_2 = 10 \sigma_\varepsilon^2 \\ r_0 + r_1 = 100 \sigma_\varepsilon^2 \\ (-18^2 + 19^2) r_0 = 1900 \sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

$$1 = V(X_t) = r_0 = \frac{1900 \sigma_\varepsilon^2}{-18^2 + 19^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \frac{19^2 - 18^2}{1900} \approx 0.01947 \quad (A)$$

$$r_1 = 100 \sigma_\varepsilon^2 - 1 \approx 0.947 \quad \left(\begin{array}{l} \text{alltid} = \\ = \sigma_X^2 \frac{b_1}{1 - b_2} \end{array} \right)$$

$$r_2 = \frac{1}{9} (10 \sigma_\varepsilon^2 - 10 + 18 r_1) \approx 0.805$$

Ex (Dämpad svängning)

Låt $\{X_t\}$ vara en AR(2)-process

$$X_t = 1.8\,X_{t-1} - 0.9\,X_{t-2} + \varepsilon_t$$

där $V(X_t) = 1$. Beräkna kvf ($r(0), r(1), r(2)$) och spektrum.

Y-W-ekv. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} a_k r_X(\tau - k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{om } \tau = 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

I detta ex är $b_1 = 1.8$ och $b_2 = -0.9$

så $a_0 = 1$, $a_1 = -1.8$ och $a_2 = 0.9$

(forts. ...)

$$R(f) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{|A(e^{-i2\pi f})|^2}$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{|1 - 1.8e^{-i2\pi f} + 0.9(e^{-i2\pi f})^2|^2}$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{|\underbrace{1 - 1.8\cos 2\pi f + 0.9\cos 4\pi f}_{\text{realdel}} + i(\underbrace{1.8\sin 2\pi f - 0.9\sin 4\pi f}_{\text{im-del}})|^2}$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 + 1.8^2 + 0.9^2 - 3.6\cos 2\pi f + 1.8\cos 4\pi f - 3.24(\underbrace{\cos 2\pi f\cos 4\pi f + \sin 2\pi f \sin 4\pi f}_{\cos(2\pi f - 4\pi f)})}$$

mha trig-ettan

$$= \frac{0.01947}{5.05 - 6.84\cos 2\pi f + 1.8\cos 4\pi f}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$= \frac{1}{n}\sum xy - \frac{1}{n^2}\left(\sum x \sum y\right)$$

MA(q)-processer

Def $\{X_t\}$ är en MA(q)-process om $X_t = \sum_{k=0}^{q} c_k \varepsilon_{t-k}$ där $\{\varepsilon_t\}$ ober.

Sats **Om** $\{X_t\}$ MA(q)

så $m_X = 0$

$$r_X(\tau) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j-k=\tau} c_j c_k & |\tau| \leq q \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$R_X(f) = \sigma_X^2 + 2\sum_{\tau=1}^{q} r_X(\tau)\cos 2\pi f\tau$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 \left| C(e^{-i2\pi f}) \right|^2 \quad \text{där } C(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_q z^q$$

Ex Låt $\{X_t\}$ vara MA(3) med $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$. Beräkna r_X och R_X.

$$r_X = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j-k=\tau} 1\cdot 1 = \sigma_\varepsilon^2 \max(0, 4-\tau)$$

$$R_X = \sigma_\varepsilon^2(4 + 2(3\cos 2\pi f + 2\cos 4\pi f + \cos 6\pi f)) =$$
$$= 2\sigma_\varepsilon^2(2 + 3\cos 2\pi f + 2\cos 4\pi f + \cos 6\pi f)$$

$\tau = 0$ $\quad \#\{j-k=\tau\} = 4$

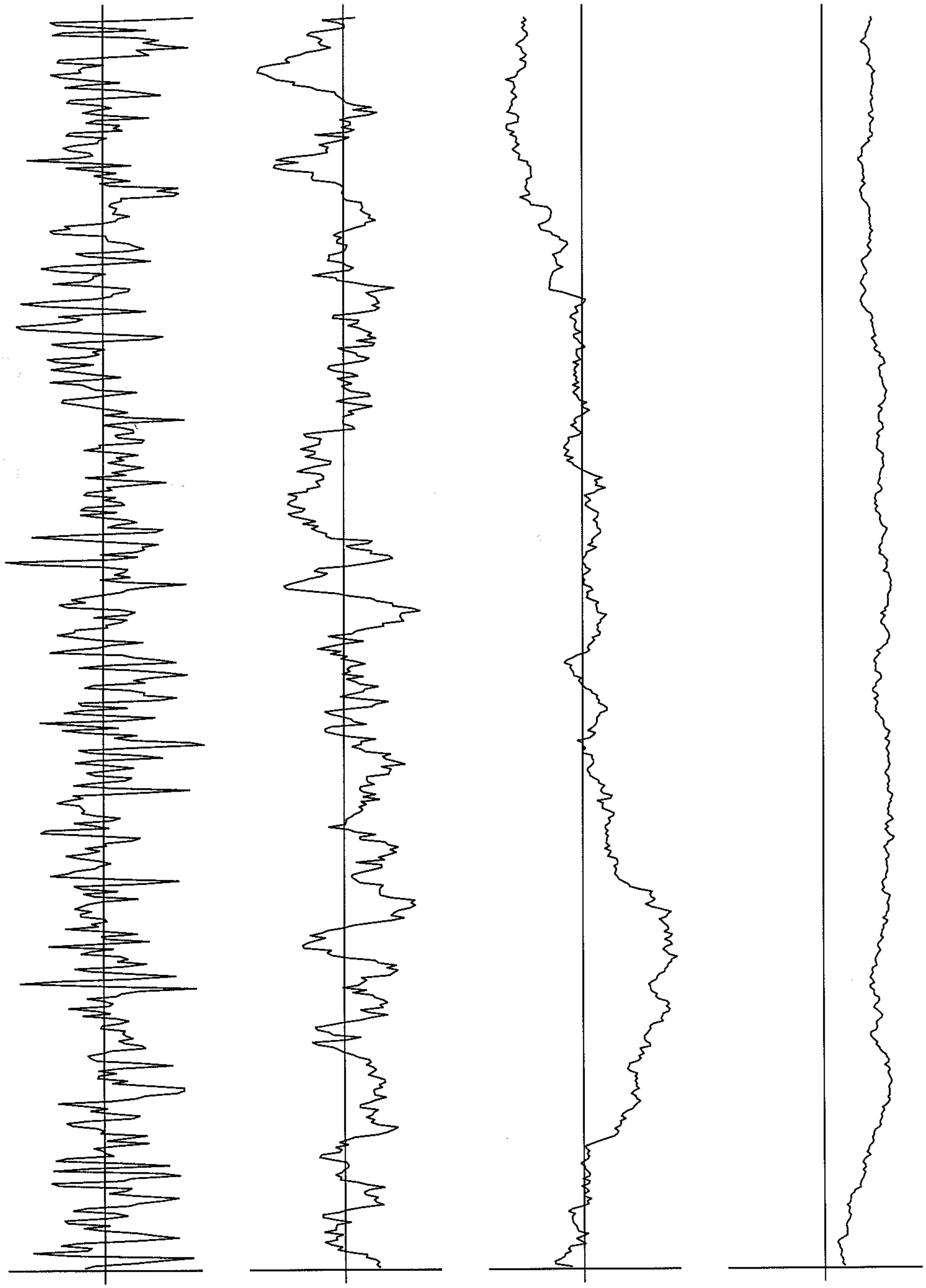
$\tau = 1$ $\quad \#\{j-k=\tau\} = 3$

$\tau = 2$ $\quad 2$

3 $\quad 1$

4 $\quad 0$

$\square$



Ex Stationaritetsvillkor m.a.p. $c_0, c_1, \ldots, c_q$?

$$X_t = \sum_{k=0}^{q} c_k \varepsilon_{t-k}$$

$$\sigma_x^2 = V(X_t) = V\left(\sum_{k=0}^{q} c_k \varepsilon_{t-k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{q} c_k^2 V(\varepsilon_{t-k}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{q} c_k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_x^2}{1 + \sum_{k=1}^{q} c_k^2} > 0 \text{ för alla } c_k \in \mathbb{R}!$$

ARMA(p, q)

Def. $\{X_t\}$ är en ARMA(p, q)-process om $\sum_{j=0}^{p} a_j X_j = \sum_{k=0}^{q} c_k \varepsilon_k$ där $\{\varepsilon_t\}$ ober.

Obs $R_X(f) = \sigma_\varepsilon^2 \dfrac{|C(e^{-i2\pi f})|^2}{|A(e^{-i2\pi f})|^2}$

Ex ARMA(1,1) : $X_t + \frac{9}{10} X_{t-1} = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$

Vad måste σ_ε^2 vara för stationaritet? (Antas $V(X_t) = 1$)

$$VL = V(X_t + \tfrac{9}{10} X_{t-1}) = V(\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}) = HL$$

$$HL = \sigma_\varepsilon^2 + 4\sigma_\varepsilon^2 = 5\sigma_\varepsilon^2$$

$$\begin{aligned}
VL &= C(X_t + \tfrac{9}{10} X_{t-1}, X_t + \tfrac{9}{10} X_{t-1}) \\
&= V(X_t) + \tfrac{81}{100} V(X_{t-1}) + 2\tfrac{9}{10} C(X_t, X_{t-1}) \\
&= 1 + 0.81 + \tfrac{18}{10} C(-\tfrac{9}{10} X_{t-1} + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}, X_{t-1}) \\
&= 1.81 + \tfrac{18}{10}(-\tfrac{9}{10} V(X_{t-1}) + 0 + 0) \\
&= 1.81 - \tfrac{142}{100} = 0.39
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \frac{0.39}{5} = 0.078$$

Derivering av processen (s.127–128)

Def $\{X_t\}$ deriverbar i kvadratiskt medel om

$$E\left(\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h} - X_t'\right)^2\right) \to 0$$

då $h \to 0$ där X_t' är derivatan av X_t

Sats 9 Antag $\{X_t\}$ svagt stationär.

(a) $\{X_t\}$ deriverbar i kvadratiskt medel $\Longleftrightarrow$ r_X 2 gånger deriverbar

$$m_{X'} = 0$$
$$r_{X'}(\tau) = -r_X''(\tau)$$
$$R_{X'}(f) = (2\pi f)^2 R_X(f)$$

(b) $\{X_t\}$ deriverbar i kvadratiskt medel $\Longleftrightarrow$ $(2\pi f)^2 R_X(f)$ integrerbar

Sats 10

Om $\{X_t\}$ svagt stationär deriverbar i kvadratiskt medel

Så $r_{X,X'}(t, t+\tau) = r_X'(\tau)$

Obs! X_t och X_t' okorrelerade ty r_X symmetrisk $\Rightarrow$
$\Rightarrow r_X'(0) = 0$

(av sats 9)

B: (av att $\exists X' : (X_{t+h} - X_t)/h \to X'$ i kv.m. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{X_t\}$ deriverbar, $m_{X'} = 0$, $r_{X'} = -r_X''$)

$$m_{X'} = E\left(\lim_{h\to 0} \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} E\left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right) \quad \text{ty konv. i kv.m.}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{E(X_{t+h}) - E(X_t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{m_X - m_X}{h} \quad \text{ty } \{X_t\} \text{ svagt stationär}$$

$$= 0$$

$$r_{X'}(\tau) = C\left(X_t', X_{t+\tau}' \right)$$

$$= C\left(\lim_{k\to 0} \frac{X_{t+k} - X_t}{k}, \lim_{h\to 0} \frac{X_{t+\tau+h} - X_{t+\tau}}{h} \right)$$

$$= \lim_{\substack{k\to 0 \\ h\to 0}} \left(E\left(\frac{X_{t+k} - X_t}{k} \cdot \frac{X_{t+\tau+h} - X_{t+\tau}}{h} \right) - \underbrace{m_{X'}(t)}_{=0} \underbrace{m_{X'}(t+\tau)}_{=0} \right)$$

ty konv. i kv.m.

$$= \lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} E\left(\frac{X_{t+k} - X_t}{k} \cdot \frac{X_{t+\tau+h} - X_{t+\tau}}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \lim_{k\to 0} E\left(\frac{X_{t+k} X_{t+\tau+h} - X_t X_{t+\tau+h} - X_{t+k} X_{t+\tau} + X_t X_{t+\tau}}{k} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \Big(E(X_{t+k} X_{t+\tau+h}) - E(X_t X_{t+\tau+h}) - E(X_{t+k} X_{t+\tau}) + E(X_t X_{t+\tau}) \Big)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \Big(r_X(\underbrace{t+\tau+h-t-k}_{\tau+h-k}) - r_X(\underbrace{t+\tau+h-t}_{\tau+h}) - r_X(\underbrace{t+\tau-t-k}_{\tau-k}) + r_X(\underbrace{t+\tau-t}_{\tau}) \Big)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \lim_{k\to 0} \left(\frac{r_X(\tau+h-k) - r_X(\tau+h)}{k} - \frac{r_X(\tau-k) - r_X(\tau)}{k} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \lim_{k\to 0} \left(- \frac{r_X(\tau+h) - r_X(\tau+h-k)}{k} + \frac{r_X(\tau) - r_X(\tau-k)}{k} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(- r_X'(\tau+h) + r_X'(\tau) \right)$$

$$= - \lim_{h\to 0} \frac{r_X(\tau+h) - r_X'(\tau)}{h}$$

$$= - r_X''(\tau)$$

$$E\left(\frac{X_{t+k} - X_t}{k} \cdot \frac{X_{t+\tau+h} - X_{t+\tau}}{h} \right) \to -r_X''(\tau) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{X_{t+h} - X_t}{h} \to X_t'$ enl. Loève-kriteriet.

$\square$