6. Inferens

I tillämpningssituationer måste man kunna skatta vvf, kvf, spektrum, AR-koeff.

Def Låt $\{x_t\}_1^n = \{x_1, .., x_n\}$ vara observationer av processen $\{X_t\}$ fördelad med parametern θ.
Då kallas $\theta_n^* = \theta^*(x_1, .., x_n)$ för (punkt-) skattningen av θ.

Skattningen θ_n^* kan både innebära talet $\theta^*(x_1, .., x_n)$ och den stokastiska variabeln $\theta^*(X_1, .., X_n)$.

Def En skattning kallas väntevärdesriktig (vvr) om $E(\theta^*) = \theta$.
Skillnaden $b = E(\theta^*) - \theta$ kallas bias

Obs! om θ^* vvr så är $b = 0$.

Sats 1 Om $\{X_t\}$ svagt stationär så $m_n^* = \frac{1}{n}\sum X_t$ vvr.

Skattning av kvf

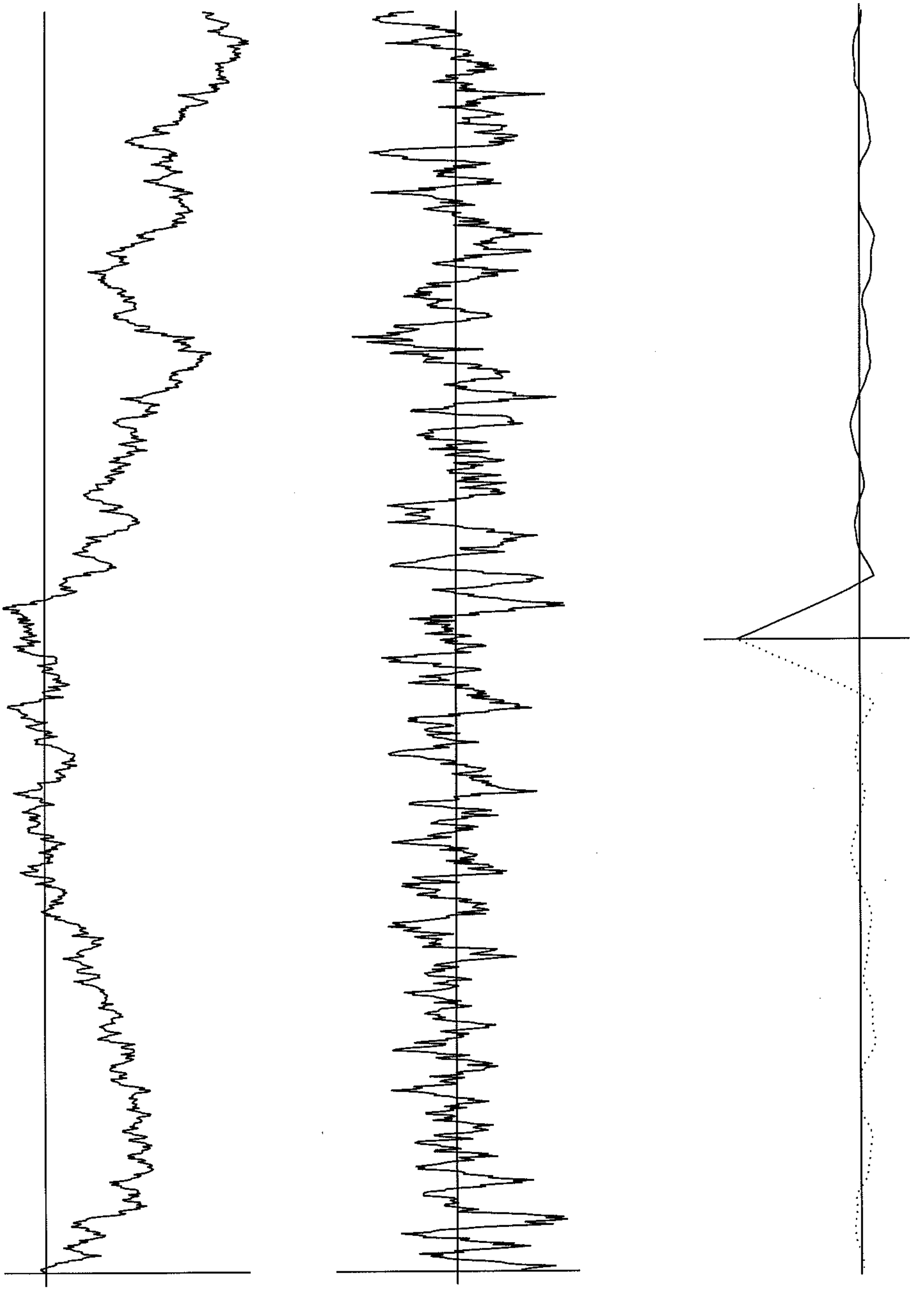
En skattning av kvf $r(\tau)$ är

$$r_n^*(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau}(X_t - m)(X_{t+\tau} - m)$$

$$\boxed{\underline{\text{Sats 3}} \quad (\text{s.}163) \quad \lim_{n\to\infty} E(r_n^*(\tau)) = r(\tau)}$$

$\underline{B}$:
$$\begin{aligned} E(r_n^*(\tau)) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau}(X_t - m)(X_{t+\tau} - m)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau} E((X_t - m)(X_{t+\tau} - m)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau} C(X_t, X_{t+\tau}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau} r(\tau) \\ &= \frac{1}{n}\cdot n\, r(\tau) \\ &= r(\tau) \end{aligned}$$

$\square$



Om m okänt skattas

$$r_n^*(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x})$$

där $\bar{x} = m^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} x_t$

Att $r_n^*(\tau) = \frac{1}{\mathbf{n}} \sum_{t=1}^{n-\tau}$

$n-\tau$ termer

n i nämnaren

gör att r_n^* ej vvr!

Däremot minimeras $E\left(\left(r_n^*(\tau) - r(\tau)\right)^2\right)$

dvs $r_n^*(\tau)$ närmast $r(\tau)$ i kv.m.

I kont. tid $m_T^* = \frac{1}{T}\int_0^T x_t\,dt$

$$r_T^*(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} (x_t - m)(x_{t+\tau} - m)\,dt$$

~~Ex Antag $X_t = A\cos^2 t + \sin^2 t$, $A \in R(0,2)$~~

~~Då är $E(X_t) = E(A)\cos^2 t + \sin^2 t = 1$~~

~~Men $M^*_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\cos^2 t + \sin^2 t \, dt = \dots = 0$~~

~~oavsett vad A är! Vidare är~~

~~$r(s,t) = C(A\cos^2 s + \sin^2 s, A\cos^2 t + \sin^2 t) =$~~

~~$= \cos^2 s \cos^2 t \, V(A) = \frac{1}{6}\cos^2 s \cos^2 t$~~

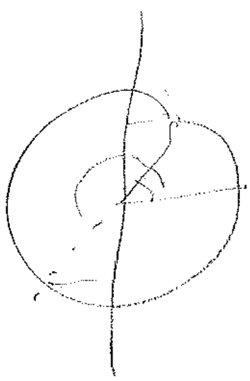
Ex Antag $X_t = A\cos(t+\phi)$, $\phi \in R(0, 2\pi)$

$A \perp \phi$, $A > 0$, $E(A^2) = 2\sigma^2$

$m(t) = E(X_t) = E(A)E(\cos(t+\phi)) = \dots = 0$

$r(s,t) = \dots = \sigma^2 \cos(\tau)$

$$m^*_{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\cos(t+\phi)\, dt$$



$$= \frac{A}{\pi}\left[\sin(t+\phi)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{A}{\pi}\left(\sin(\pi+\phi) - \sin(\phi)\right)$$

$$= -\frac{A}{\pi} 2\sin(\phi)$$

$$r^{*}_{\pi}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (X_t - m)(X_{t+\tau} - m)\, dt$$

$= 0$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\cos(t+\phi)\, A\cos(t+\tau+\phi)\, dt$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = \\ &= 2\cos\alpha\cos\beta \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} A^2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\Big(\cos(t+\phi+t+\tau+\phi) + \\ + \cos(t+\phi-t-\tau-\phi)\Big)\, dt$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos(2t+2\phi+\tau)\, dt + \int_0^{\pi} \cos(-\tau)\, dt \right)$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{2}\sin(2t+2\phi+\tau)\right]_0^{\pi} + \pi\cos(\tau) \right)$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(2\phi+\tau+2\pi) - \frac{1}{2}\sin(2\phi+\tau) + \pi\cos\tau \right)$$

$=$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \cdot \pi\cos\tau$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \cos\tau$$

Frekvensanalys

Analysmetod. Syftet är att skatta frekvensinnehållet ($R(f)$) i en signal.

3 metoder: filtrering, $\underbrace{\text{fourieranalys}}_{\text{klassisk}}$, $\underbrace{\text{parameterskattning}}_{\text{modernt}}$.

Diskret $\mathcal{F}$-transf: $\boxed{z_n(f) = \sum_{t=0}^{n-1} x_t e^{-i2\pi f t}}$

Def $R^*_{per}(f) = \frac{1}{n} |z_n(f)|^2$ kallas periodogrammet till $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$

Obs! R^*_{per} periodisk med periodlängd 1.

R^*_{per} kallas spektrum för $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$

(medan R spektraltätheten för $\{X_t\}$)

"Sats" (s. 169)

$$\boxed{R^*_{per}(f) = \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{t=0}^{n-1} x_t \cos(2\pi f t)\right)^2 + \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_t \sin(2\pi f t)\right)^2\right)}$$

Ex $\quad X_t = 0.9\,X_{t-1} + \varepsilon_t \quad$ (AR(1)-pr.)

observationer

0.33	0.15	0.06	-0.13	-0.83	-1.01	-1.32	-1.21	-0.97
-0.92	-1.31	-0.86	-0.67	-0.70	-0.61	-1.02	-1.07	-1.24
-0.91	-0.83	-0.92	-0.29	-0.78	-0.91	-0.75		

i tidpkter $0, 1, \ldots, 25$

$$R^*_{per} = 0.04\Big(\big(0.33 + 0.15\cos(2\pi f) + \ldots - 0.75\cos(48\pi f)\big)^2 + \\ + \big(0.15\sin(2\pi f) + \ldots - 0.75\sin(48\pi f)\big)^2\Big)$$

OH Denna och

R^* för 2 andra simuleringar