Valda nedslag i
kursen linjär algebra
(sammanfattning med
exempel)

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2ay = -1 \\ 2x + y = a^2 \end{cases}$$

för alla värden på $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2ay = -1 \\ y + 4ay = a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2ay = -1 \\ (1+4a)\,y = a^2+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2ay - 1 \\ y = \dfrac{a^2+2}{1+4a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a^3+4a}{1+4a} - \dfrac{1+4a}{1+4a} \\ y = \dfrac{a^2+2}{1+4a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a^3-1}{4a+1} \\ y = \dfrac{a^2+2}{4a+1} \end{cases}$$

om $4a+1 \neq 0$ dvs $a \neq -\frac{1}{4}$.

Om $a = -\frac{1}{4}$ $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = -1 \\ 2x + y = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = -1 \\ 0 = \frac{1}{16} + 2 \end{cases}$$ saknar lösning!

Svar Om $a \neq -\frac{1}{4}$ är $\begin{cases} x = (2a^3-1)/(4a+1) \\ y = (a^2+2)/(4a+1) \end{cases}$

Om $a = -\frac{1}{4}$ saknas lösning

2

Beräkna arean av ellipsen $2x^2-8xy+26y^2=6$

Skriv om ellipsen:

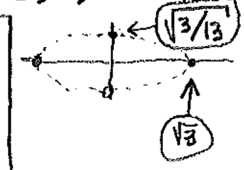
$$x^2-4xy+13y^2=3$$

$x=0 \Rightarrow 4y^2+9y^2=3 \Rightarrow y=\sqrt{\frac{3}{13}}$

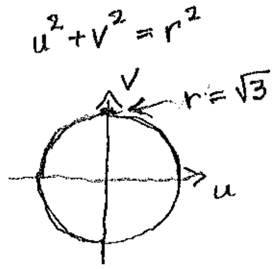
$y=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Kvadratkomplettera: $x^2-4xy+4y^2+9y^2=3$

$$(x-2y)^2+(3y)^2=3$$



Substituera: $\begin{cases} u = x-2y \\ v = 3y \end{cases}$



Beräkna cirkelarean: $u^2+v^2=(\sqrt{3})^2$

$$\Rightarrow A_{cirk}=3\pi$$

Areaskalningen fås av $\det\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dvs

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow A_{ellips}=\frac{A_{cirk}}{\text{skalning}}=\frac{3\pi}{3}=\pi.$$

Skalärprodukt

$$\boxed{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} |\mathbb{u}| \cdot |\mathbb{v}| \cdot \cos([\mathbb{u}, \mathbb{v}]) & \text{om } \mathbb{u} \neq \mathbb{0},\ \mathbb{v} \neq \mathbb{0} \\ 0 & \text{om } \mathbb{u} = \mathbb{0} \text{ el. } \mathbb{v} = \mathbb{0} \end{cases}}$$

$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0 \iff \mathbb{u} \perp \mathbb{v}$$

Skalärprodukt användbart för bestämning av ON-bas, projektionsproblem, vinkelbestämning, avstånd mellan punkt och linje/plan.

(För ortogonal projektion, se exembel b) nedan och f-ant. och boken)

I räkningar får man skalärprod. av

$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Vektorprodukt

$\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ definieras av

(i) $|\mathbb{u} \times \mathbb{v}| = |\mathbb{u}| \cdot |\mathbb{v}| \cdot \sin([\mathbb{u}, \mathbb{v}])$

(ii) $\mathbb{u} \times \mathbb{v} \perp \mathbb{u}, \mathbb{v}$

(iii) $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{u} \times \mathbb{v}$ pos. orienterade

(iv) $\mathbb{u} = \mathbb{0} \vee \mathbb{v} = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{u} \times \mathbb{v} = \mathbb{0}$

I räkningar får man vektorprod. av (3 dim.)

$$\mathbb{u} \times \mathbb{v} = [u_1 \; u_2 \; u_3] \times [v_1 \; v_2 \; v_3]$$

$$= \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right]$$

Vinkelbestämning

P.g.a. att man kan beräkna $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$ resp. $|\mathbb{u} \times \mathbb{v}|$ utan att använda definitionerna explicit kan man m.h.a. dessa få $\cos([\mathbb{u}, \mathbb{v}])$ och $\sin([\mathbb{u}, \mathbb{v}])$ varmed vinkeln $[\mathbb{u}, \mathbb{v}]$ är bestämd.

Vinkelbestämning.

Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(-3,-3,6)$ och $(1,0,-1)$.

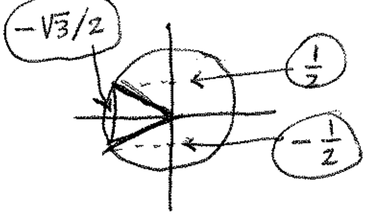
Utnyttja

$$\boxed{\begin{aligned} u\cdot v &= |u||v|\cos([u,v]) \\ |u\times v| &= |u||v|\sin([u,v]) \end{aligned}}$$

$$u\cdot v = (-3,-3,6)\cdot(1,0,-1) = -3-6 = -9$$

$$|u||v| = \sqrt{9+9+36}\sqrt{1+0+1} = \sqrt{9\cdot 6}\sqrt{2} = 3\sqrt{4\cdot 3} = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos([u,v]) = \frac{u\cdot v}{|u||v|} = \frac{-9}{6\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Rightarrow [u,v] \text{ är antingen } \frac{5\pi}{6} \text{ el. } \frac{7\pi}{6}$$

$$u\times v = \left(\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (3-0, -(3-6), (0-(-3))) = (3,3,3)$$

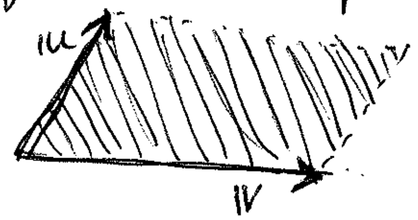
$$|u\times v| = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin([u,v]) = \frac{|u\times v|}{|u||v|} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Alltså är $[u,v] = \dfrac{5\pi}{6}$.

Ex Beräkna arean av den triangel som spänns av $\mathbf{u} = (1,-2,-1)$ och $\mathbf{v} = (2,1,-3)$

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ är arean av det parallellogram som spänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$



Därmed är triangelarean $\frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left((-2)(-3) - (-1)\cdot 1, -\left(1\cdot(-3) - (-1)2\right), 1\cdot 1 - (-2)2 \right)$$

$$= (7, 1, 5)$$

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{49+1+25}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{75} = \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 25}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

Vektorerna $u = (2,3,-1)$ och $v = (-2,0,4)$ spänner planet π med normerad normal $\mathbf{n}$. Linjen l går genom punkterna $P_1 = (3,1,1)$ och $P_2 = (7,1,3)$ och har normerad riktningsvektor $\mathbf{r}$. Beräkna

a) $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$

b) $\mathbf{r}$'s projektion på $\mathbf{n}$

---

a) Planet π bestäms av att punkterna $(2,3,-1)$ och $(-2,0,4)$ och origo ligger i det dvs punkterna satisfierar ekvationen $ax + by + cz + d = 0$. Eftersom origo ligger i π är $d = 0$. Vidare är

$$\begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ -2a + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow 2c = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4c + 3b - c = 0 \\ 2c = a \end{cases} \Rightarrow b = -c$$

så $a = 2t$, $b = -t$, $c = t$ vilket ger $2tx - ty + tz = 0$. T.ex. med $t = 1$ har vi: $2x - y + z = 0$. Den normerade normalen blir

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|(2,-1,1)|}(2,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$$

8

En riktningsvektor för l är

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (7,1,3) - (3,1,1) = (4,0,2)$$

så en annan är $\frac{1}{2}(4,0,2) = (2,0,1)$

oh den normerade är

$$\mathbb{r} = \frac{1}{|(2,0,1)|}(2,0,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$$

$$\mathbb{n} \times \mathbb{r} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) \times \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{5}}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{30}}(-1, 0, 2)}}$$

b) $$\mathbb{r}' = \frac{\mathbb{r} \cdot \mathbb{n}}{|\mathbb{n}|^2}\mathbb{n}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)}{|\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)|^2} \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{6}}}(4-0+1)}{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}(4+1+1)} \frac{1}{\cancel{\sqrt{6}}}(2,-1,1)$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{6}(2,-1,1)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{6}(2,-1,1)}}$$

Projektionen (riktning och längd) då $\mathbb{u}$ projiceras längs $\mathbb{v}$ på planet π.

---

projektionen $\mathbb{w} = \mathbb{u} + t\mathbb{v} : \pi_0$

$\pi : x + by + cz = d$ (om inte koefficienten a framför x är 0)

π_0 ~~dett~~ translationen av π till origo

dvs med $d = 0$: $\pi_0 : x + by + cz = 0$

$\Rightarrow \pi_0 = \{(-by - cz, y, z) : y, z \in \mathbb{O}\}$.

Om nu $\mathbb{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3)$

så är $\mathbb{w} = (u_1 + tv_1, u_2 + tv_2, u_3 + tv_3)$

Vi ska nu hitta t (och y och z) så att

$\mathbb{w} \in \pi_0$ dvs lösa ekv.-systemet

$$\begin{cases} u_1 + tv_1 = -by - cz \\ u_2 + tv_2 = y \\ u_3 + tv_3 = z \end{cases}$$

Ex Beräkna längden av $\mathbb{u}$s skugga på planet π då solstrålarna infaller längs $\mathbb{v}$ där $\mathbb{u}=(1,1,1)$, $\mathbb{v}=(2,-1,-2)$, $\pi: x+2y+3z=4$

$\pi_0 : x+2y+3z=0 \iff x=-2y-3z$

dvs $\pi_0 = \{(-2y-3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Skuggan (dvs projektionen) är

$\mathbb{w} = \mathbb{u} + t\mathbb{v} = (1+2t, 1-t, 1-2t)$

varmed ekv. systemet är

$$\begin{cases} 1+2t = -2y-3z \\ 1-t = y \\ 1-2t = z \end{cases} \sim \begin{cases} 2t+2y+3z = -1 & (1) \\ t+y = 1 & (2) \\ 2t + z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\overset{3(3)-(1):}{\begin{cases} 2t+2y+3z = -1 & (1') \\ t+y = 1 & (2') \\ 4t-2y = 4 & (3') \end{cases}} \sim \overset{2(2')+(3')}{\begin{cases} 2t+2y+3z = -1 \\ t+y = 1 \\ 6t = 6 \end{cases}} \sim \begin{cases} t=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

varmed $\mathbb{w} = (1+2\cdot 1, 1-1, 1-2\cdot 1) = (3,0,-1)$

Längden av skuggan är slutligen

$|\mathbb{w}| = \sqrt{3^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

Låt u, v, w vara vektorer sådana att

$$-4u_1 = 20u_2 = 5u_3 = 20$$

$$u_2v_3 - u_3v_2 = u_3v_1 - u_1v_3 = u_1v_2 - u_2v_1 = 1$$

$$3(w_1 - w_2) = 2(w_1 - w_3) = 6(w_2 - w_3) = 1$$

Konstruera en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ m.h.a. u, $u \times v$ och $(u \times v) \times w$.

Eftersom $u \perp u \times v$ och $u \times v \perp (u \times v) \times w$ återstår endast att kolla att $u \perp (u \times v) \times w$ för att basen ska vara ortogonal.

Låt oss nu försöka specificera vektorerna och normera dem:

$u = (u_1, u_2, u_3)$ där $-4u_1 = 20 \Rightarrow u_1 = -\frac{20}{4} = -5$, $20u_2 = 20 \Rightarrow u_2 = 1$, $5u_3 = 20 \Rightarrow u_3 = 4$.

Alltså är $u = (-5, 1, 4)$.

$u \times v$ kan härledas på 2 sätt

1. $u \times v = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3)$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$= (1, 1, 1)$$

2. Villkoret för u, v med $u = (-5, 1, 4)$ insatt blir $v_3 - 4v_2 = 4v_1 + 5v_3 = -5v_2 - v_1 = 1 \Rightarrow v = (-5t-1, t, 4t+1)$ så $u \times v = (-5, 1, 4) \times (-5t-1, t, 4t+1) =$

$$= (4t+1-4t, -(-5(4t+1) - 4(-5t-1)), -5t - (-5t-1)) =$$

$$= (1, 1, 1)$$

$(u \times v) \times w$ blir nu

$$(1,1,1) \times (w_1, w_2, w_3) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (w_3 - w_2, \ w_1 - w_3, \ w_2 - w_1) =$$

$$= \left(-\frac{1}{6}, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6}(1,-3,2)$$

Nu kan $u \perp (u \times v) \times w$ kollas:

$$u \cdot ((u \times v) \times w) = (-5,1,4) \cdot (1,-3,2) =$$

$$= -5 - 3 + 8 = 0 \quad \underline{\text{ok!}}$$

Då återstår endast normering

$$|u|^2 = 25 + 1 + 16 = 42 \Rightarrow e_1 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{42}}(-5,1,4)}}$$

$$|u \times v|^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow e_2 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}}$$

$$|(u \times v) \times w|^2 = \frac{1}{36}(1 + 9 + 4) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_3 = \sqrt{\frac{18}{7}} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)(1,-3,2)$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{7 \cdot 6}}(1,-3,2)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2)}}$$

13

Lös ekvationen

$$A^2 \mathbf{x} - A\mathbf{x} = b$$

där $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$A^2\mathbf{x} - A\mathbf{x} = A(A - I)\mathbf{x}$$

$$A(A-I) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & -2-1 \\ 3+6 & -3+2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\{A(A-I)\}^{-1} : \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -28 & 9 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -28 & -3\cdot 28 & 28 & 0 \\ 0 & -3\cdot 28 & 27 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} +28 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & +28 & -9 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{28} & \frac{3}{28} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{28} & -\frac{1}{28} \end{array}\right)$$

$$\mathbf{x} = \{A(A-I)\}^{-1} b = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -5+33 \\ -45-11 \end{bmatrix} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 28 \\ -56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Beräkning av determinant

Reducera gradtalet successivt genom uppdelning i under-determinanter tills man nått 2×2 determinanter som kan beräknas.

Ex

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{utv. efter första raden}\} =$$

Obs! Komihåg "varannan minus och varannan plus"!

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & -7 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 3\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$\{$utv. efter andra raden$\}$

$$= 2\left(-2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}\right) +$$

$\{$utv. efter tredje kolonnen$\}$

$$+ 3\left(-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 0\right) -$$

$\{$utveckling efter andra raden$\}$

$$- 1\cdot\left(-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2(-2(0-14) - (0+6) + 3(7-6)) +$$

$$+ 3(-2(3-12) + 3(15+6)) -$$

$$- (-(7-6) + 2(-35-12) + (15+6))$$

$$= 2(28-6+3) + 3(18+63) - (-1-94+21)$$

$$= 50 + 243 + 74 = \underline{\underline{367}}$$

Bestäm värdet på a så att

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$ får ett dubbelt egenvärde.

Beräkna egenvärdet och motsvarande egenvektor.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a \\ -5 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)-5a =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 5a = 0$$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-3+5a} = 2 \quad \text{om} \quad 1+5a=0$$

dvs $a = -\frac{1}{5}$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \qquad (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} (2-1)x + \frac{1}{5}y = 0 \\ -5x + (2-3)y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5}y = 0 \\ -5x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -5t \end{cases}$$

dvs $\mathbf{v} = (1, -5)$