5.14 $\mathbb{F} = (1,-1,-2)$ i $(1,-2,0)$

a) Momentet beräknas som $\mathbb{M} =$
$= \mathbb{r} \times \mathbb{F}$ där $\mathbb{r} = (1,-2,0)$
(i allmänhet $\overrightarrow{PQ}$ men här Q = origo)
Därmed är

$$\mathbb{M} = (1,-2,0) \times (1,-1,-2)$$
$$= \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (4, 2, 1)$$

b) Momentet m.a.p. en axel: $\mathbb{M} \cdot \mathbb{n}$
så $\mathbb{M} \cdot \mathbb{e}_1 = 4$
$\mathbb{M} \cdot \mathbb{e}_2 = 2$
$\mathbb{M} \cdot \mathbb{e}_3 = 1$

c) En normerad riktningsvektor
är $\mathbb{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ så

$$\mathbb{M} \cdot \mathbb{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}(4+2+1) = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

5.15 Låt oss först försöka hitta en ortogonal bas, därefter normera och fixa orientering, och slutligen härleda ekvationen för planet π.

Låt $u_1 = (1,1,-1)$ och låt $u_2 = (a,b,c)$ vara en vektor som ligger i π, dvs $a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b \Rightarrow$
$\Rightarrow u_2 = (a,b,-a-b)$. Vidare ska $u_1 \perp u_2$ varmed $0 = (1,1,-1)\cdot(a,b,-a-b) =$
$= a+b+(-1)(-a-b) = 2(a+b) \Rightarrow b=-a$
$\Rightarrow u_2 = (a,-a,0)$, t.ex. $u_2 = (1,-1,0)$

En vektor u_3 sådan att $u_3 \perp u_1 \wedge u_3 \perp u_2$ är $u_1 \times u_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) =$
$= (-1,-1,-2)$ varmed även $u_3 = (1,1,2)$ duger. Eftersom $u_1, u_2, u_1 \times u_2$ är positivt orienterade (enl. def. av vektorprodukt, se s. 85) är $u_1, u_2, -u_1 \times u_2$ neg. och $u_2, u_1, -u_1 \times u_2$ pos. Slutligen har vi normeringen $\hat{e}_1 = \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$,
$\hat{e}_2 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ och $\hat{e}_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$

Ny HON-bas: $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$, $\hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$

Planets normal är $n = (1,1,1)$ (koefficienterna framför x_1, x_2, x_3). Därmed måste planet ha denna normal <u>och</u> innehålla origo även i den nya basen. Vi översätter normalriktningen $(1,1,1)$ till normalvektorn $\hat{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ i den nya basen där

$(1,1,1) = \alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2 + \gamma \hat{e}_3$. Om man nu tar skalärprodukten i båda led med $\hat{e}_1$ får vi

$$(1,1,1)\hat{e}_1 = \alpha \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1}_{=1 \text{ ty } |e_1|=1} + \beta \underbrace{\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1}_{=0 \text{ ty } \hat{e}_2 \perp \hat{e}_1} + \gamma \underbrace{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1}_{=0 \text{ ty } \hat{e}_3 \perp e_1} = \alpha$$

På samma sätt får man med skalärprodukt med e_2 i båda led resp. e_3 i båda led

$(1,1,1)\hat{e}_2 = \beta$ och $(1,1,1)\hat{e}_3 = \gamma$. Därmed är

$$\alpha = (1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = 0$$

$$\beta = (1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\gamma = (1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2) = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Därmed är normalen för π i den nya basen $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,2\sqrt{2})$ varmed ekvationen för π i den nya basen är $\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{x}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\hat{x}_3 = 0}$

6.2 d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right)}_{\text{(första raden)}} - 2\underbrace{\left(2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right)}_{\text{(första raden)}} +$$

$$+ 2\underbrace{\left(2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right)}_{\text{(första kolonnen)}} =$$

$$= \left(-(-1+4) + 2(0+2)\right) - 2\left(2(-1-4) + 2(-4+0)\right) +$$

$$+ 2\left(2(-1-4) - 2(-1+4)\right)$$

$$= (-3+4) - 2(-10-8) + 2(-10-6)$$

$$= 1 + 36 - 32 = 5 \Leftrightarrow \underline{\text{lin. ober}}!$$

6.5 Visa

$(1,2,3,4)$, $(0,1,2,3)$, $(0,0,1,2)$, $(0,0,0,1)$

utgör bas för $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overset{1}{-}\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = -1$$

så de är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ de (raderna) utgör bas för $\mathbb{R}^4$.

Ange koordinaterna för $(1,1,1,1)$.

$$a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_4 = (1,1,1,1)$$

$$\begin{cases} a + 0 + 0 + 0 = 1 & \Rightarrow a = 1 \\ 2a + b + 0 + 0 = 1 & \Rightarrow b = 1-2 = -1 \\ 3a + 2b + c + 0 = 1 & \Rightarrow c = 1-3+2 = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d = 1 & \Rightarrow d = 1-4+3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ koordinaterna för $(1,1,1,1)$

blir $\underline{(1, -1, 0, 0)}$

6.7 Ortogonal?

$e_1 \circ e_2 = (1,2,2,0) \circ (2,-1,0,2) =$

$= 2-2+0+0 = 0$

$e_1 \circ e_3 = (1,2,2,0) \circ (2,0,-1,-2) =$

$= 2+0-2+0$

$e_1 \circ e_4 = (1,2,2,0) \circ (0,2,-2,1) =$

$= 0+4-4+0 = 0$

$e_2 \circ e_3 = (2,-1,0,2) \circ (2,0,-1,-2) =$

$= 4+0+0-4 = 0$

$e_2 \circ e_4 = (2,-1,0,2) \circ (0,2,-2,1) =$

$= 0-2+0+2 = 0$

$e_3 \circ e_4 = (2,0,-1,-2) \circ (0,2,-2,1) =$

$= 0+0+2-2 = 0$

ok!

Normerad?

$|e_1|^2 = 1+4+4+0 = 9 \Rightarrow e_1' = \frac{1}{3}(1,2,2,0)$

$|e_2|^2 = 4+1+0+4 = 9 \Rightarrow e_2' = \frac{1}{3}(2,-1,0,2)$

$|e_3|^2 = 9 \Rightarrow e_3' = \frac{1}{3}(2,0,-1,-2)$

$|e_4|^2 = 9 \Rightarrow e_4' = \frac{1}{3}(0,2,-2,1)$

6.8 a)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = y_2 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = y_3 \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 = y_4 \end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} \mathbb{a}_1 \mathbb{x} = y_1 \\ \mathbb{a}_2 \mathbb{x} = y_2 \\ \mathbb{a}_3 \mathbb{x} = y_3 \\ \mathbb{a}_4 \mathbb{x} = y_4 \end{cases} \quad \text{där } \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

dvs

$$\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \mathbb{a}_3 \\ \mathbb{a}_4 \end{bmatrix} \mathbb{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

dvs

$$A \mathbb{x} = \mathbb{y}$$

$$\text{där } A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \mathbb{a}_3 \\ \mathbb{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(dvs ~~[illegible]~~ den matris vi hade i 6.2 ...)

7.2 a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 6+4 \\ -1+2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ ej. def.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2 & 2+6-3+4 \\ 1 & -2 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+9 & 1+3 & -1 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

7.4 a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-1 \\ -4+1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2-0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$B^T A^T = (AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

7.5 a) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

ej lika!

b) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

c) $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$

[Obs! I samtliga fall (a,b,c) måste A och B vara kvadratiska ~~[illegible]~~ matriser för att A^2 och B^2 ska vara definierat!]

7.7 a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 5x_2 = y_2 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathbb{a}_1 \mathbb{x} = y_1 \\ \mathbb{a}_2 \mathbb{x} = y_2 \end{cases}$ där $\mathbb{a}_1 = (1, 2)$, $\mathbb{a}_2 = (2,5)$ och $\mathbb{x} = \cancel{(x_1, x_2)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \end{bmatrix} \mathbb{x} = \mathbb{y}$ där $\mathbb{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$A\mathbb{x} = \mathbb{y}$ där $A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

b) Lös ekvationssystemet (dvs bryt ut x_1, x_2)

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 5x_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 - 2y_1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2(y_2 - 2y_1) \\ x_2 = y_2 - 2y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3y_1 - 2y_2 \\ x_2 = -2y_1 + y_2 \end{cases}$

$\cancel{A}$ $B\mathbb{y} = \mathbb{x}$ där $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbb{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

7.9

a) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ inversen är $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

lösning saknas!

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-0)+(1-2) = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ ej inverterbar!

7.13 A kvadratisk sådan att $A^2 + A + I = 0$

a) Visa A inverterbar och ange A^{-1}!

$A^2 + A + I = 0$

$\Rightarrow I = -A^2 - A = A(-A-I)$

Men definitionen av inversen är att det är den matris som gånger A blir I, dvs $AA^{-1} = I$.

Eftersom $A \cdot (-A-I) = I$ betyder detta att $-A-I$ är inversen A^{-1}.

b) Visa att $A^3 = I$

Vet att $A^2 + A + I = 0 \quad (*)$

Detta innebär som vi sett i a-uppgiften att $A(-A-I) = I$.

Multiplicerar vi $(*)$ med A fås

$$A(A^2 + A + I) = A \cdot 0$$

$$A^3 + A^2 + A = 0$$

$$A^3 + A(A+I) = 0$$

$$A^3 - A(-A-I) = 0$$

$$A^3 - I = 0$$

dvs $A^3 = 0 + I = I$.

7.21 $\quad \ell: 2x_1 + 3x_2 = 0$

$$\Rightarrow \ell: \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = -2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1' = \frac{1}{13}(5e_1 + 12e_2) \\ e_2' = \frac{1}{13}(-12e_1 + 5e_2) \end{cases}$$

Koordinaterna x_1' och x_2' i det nya systemet $Oe_1'e_2'$ fås av av sätta in parametervärdena för x_1 och x_2 på platsen för e_1 och e_2 i omvandlingen till e_1' och e_2' ovan.

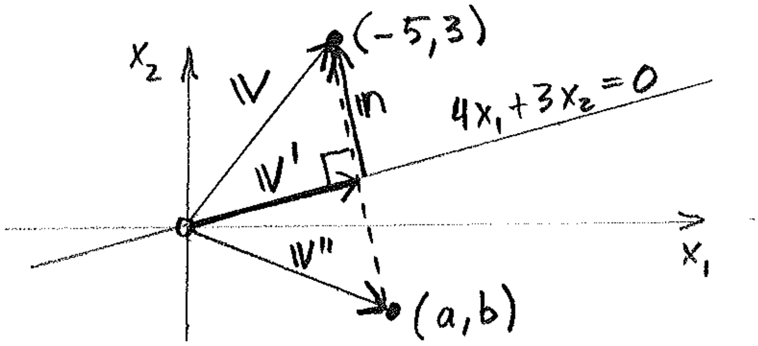
$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{13}(5\cdot 3t + 12(-2t)) \\ x_2' = \frac{1}{13}(-12\cdot 3t + 5(-2t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{13}(15t - 24t) \\ x_2' = \frac{1}{13}(-36t - 10t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{13}(-9t) \\ x_2' = \frac{1}{13}(-46t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1' = 9t \\ x_2' = 46t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ell: 46x_1' - 9x_2' = 0$$

8.3 Spegling av (a,b) i $\ell : 4x_1 + 3x_2 = 0$ ger $(-5,3)$.



Plan:

1. Bestäm riktningsvektorn $\mathbf{r}$ för ℓ.
2. Beräkna $\mathbf{v}'$ (projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{r}$).
3. Beräkna $\mathbf{n} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$.

Då är $\mathbf{v}'' = (a,b) = \mathbf{v} - 2\mathbf{n}$.

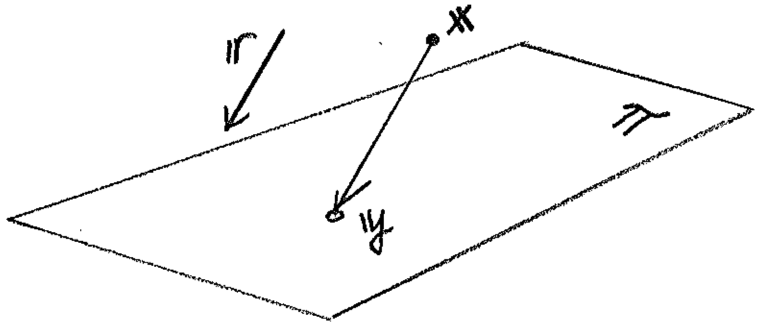
1. En riktningsvektor är $\mathbf{r} = (-3,4)$
(eftersom $4\cdot(-3) + 3\cdot 4 = 0$).

2. $$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{r} = \frac{(-5,3)\cdot(-3,4)}{|(-3,4)|^2}(-3,4) =$$
$$= \frac{15+12}{9+16}(-3,4) = \frac{27}{25}(-3,4)$$

3. $$\mathbf{n} = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = (-5,3) - \frac{27}{25}(-3,4) =$$
$$= \left(\frac{-125+27\cdot 3}{25}, \frac{75-4\cdot 27}{25}\right) = \frac{1}{25}(-44,-33) =$$
$$= -\frac{11}{25}(4,3)$$

$$\mathbf{v}' = (-5,3) - 2\cdot\left(-\frac{11}{25}(4,3)\right) = \left(\frac{-125+88}{25}, \frac{75+66}{25}\right) =$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{25}(-37, 141)}}$$

8.8 $\mathbf{r} = (1,2,3)$ $\pi : 9x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$



Projektionen: $\mathbf{x} + t\mathbf{r} = \mathbf{y}$

eller om man så vill $\mathbf{y} = \mathbf{x} + s\mathbf{r}$

där $\mathbf{y}$ satisfierar $9y_1 + y_2 - 4y_3 = 0.$ (*)

$\mathbf{x} + s\mathbf{r} = (x_1 + s\cdot 1,\ x_2 + s\cdot 2,\ x_3 + s\cdot 3)$

Dessa koordinater ska vara lika med $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ och sätts de in i planets ekv. (*) fås

$$9(x_1+s) + (x_2+2s) - 4(x_3+3s) = 0$$

$$9x_1 + x_2 - 4x_3 - s = 0$$

dvs $s = 9x_1 + x_2 - 4x_3$ för att man ska träffa planet π då man "går" i riktningen $\mathbf{r}$ från punkten (x_1, x_2, x_3).

Sambandet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ blir

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + s\mathbf{r}$$

$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) + (9x_1 + x_2 - 4x_3)\cdot(1,2,3)$$

$$= (10x_1 + x_2 - 4x_3,\ 18x_1 + 3x_2 - 8x_3,\ 27x_1 + 3x_2 - 11x_3)$$

dvs $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ där $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -4 \\ 18 & 3 & -8 \\ 27 & 3 & -11 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

9.2 a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a \\ c & a+b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b+c \\ c & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b+c \\ b & c+a \end{vmatrix} =$ {utv. efter första kolonnen}

$= b(a+b) - c(c+a) - a(a+b) + c(b+c) + a(a+c) - b(b+c) =$

$= ab + b^2 - c^2 - ac - a^2 - ab + bc + c^2 + a^2 + ac - b^2 - bc = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = (1+a)\begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1+c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1+b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ {utv. efter första kolonnen}

$= (1+a)\big((1+b)(1+c) - 1\big) - \big((1+c) - 1\big) + \big(1 - (1+b)\big) =$

$= (1+a)(1+b)(1+c) - 1 - a - c - b =$

$= 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc - 1 - a - b - c =$

$= ab + ac + bc + abc$

9.3

$\det(A+B)$: $A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 3-2 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9$

$\det A + \det B$: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8$

$\det A + \det B = -5 + 8 = 3$

Slutsats: generellt gäller <u>ej</u> att
$\det(A+B) = \det A + \det B$

9.5 Arean av $\Delta\{(1,1),(3,7),(2,3)\}$?

$\mathbb{u} = (3,7)-(1,1) = (2,6)$

$\mathbb{v} = (2,3)-(1,1) = (1,2)$

Triangeln spänns av $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$

$V(\mathbb{u},\mathbb{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-6 = -2$

Triangelarean $= \frac{1}{2}|V(\mathbb{u},\mathbb{v})| = 1$

9.10 a) A är en 3×3-matris $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det 2A = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= 2a_{11}\begin{vmatrix} 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} - 2a_{12}\begin{vmatrix} 2a_{21} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{33} \end{vmatrix} + 2a_{13}\begin{vmatrix} 2a_{21} & 2a_{22} \\ 2a_{31} & 2a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= 2a_{11}(2a_{22}2a_{33} - 2a_{23}2a_{32}) - 2a_{12}(\cdots) + 2a_{13}(\cdots)$$

$$= 8\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8\det A = 2^3 \det A$$

[I allmänhet kan man visa att
$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ där A är $n\times n$.]

b) A skevsymmetrisk dvs $A^T = -A$

$\det A = \det A^T = \det(-A) = \det((-1)\cdot A) =$

$= (-1)^3 \det A = -\det A$ om A är 3×3.

Så $\det A + \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

9.12 a) Visa A inv.bar $\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Antag att A inv.bar med invers A^{-1}

Då är

$1 = \det I = \det(AA^{-1}) =$

$\underset{\{\text{prod.regeln}\}}{=} \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A^{-1} = 1/\det A$ ty A inv.bar.

så $\det A \neq 0$.

b) $\det A = \pm 1$ om A ortogonal

A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A = \det A^T = \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

(enl. föreg. uppg.) så

$(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A$ är $+1$ eller -1.

c) A inv.bar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det A \cdot \det A \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det A^2 \neq 0 \Leftrightarrow A^2$ inv.bar.

10.1 a) $\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3$

Ser $\lambda = -1$ $\quad (\lambda+1)(\lambda+3) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$

$\lambda_1 = -1 : \quad (-1 \cdot I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} -1+2 & -1 \\ -1 & -1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -3 : \quad (-3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} -3+2 & -1 \\ -1 & -3+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e) $\begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7$

Ser $\lambda = -1$ $\quad (\lambda+1)(\lambda-7) = \lambda^2 - 6\lambda - 7$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 7$

$$\begin{cases} -6x_1 - 4x_2 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10.2 c)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -1 \\ 3 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\left\{\substack{\text{utv.}\\ \text{efter}\\ \text{3:e}\\ \text{raden}}\right\}}{=} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4-\lambda & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 5+(4-\lambda)+(2-\lambda)+3+(2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)-15(2-\lambda)$$

$$= 5+4-\lambda+2-\lambda+3+16+8\lambda^2-20\lambda-\lambda^3-30+15\lambda$$

$$= \underline{-\lambda^3+8\lambda^2-7\lambda} = 0 \qquad \boxed{\text{kar. pol.}}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{16-7} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

E-värdena $\underline{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 7}$

$$A\mathbf{x} - \lambda I \mathbf{x} = 0$$

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 5y - z = 0 \\ 3x + (4-\lambda)y + z = 0 \\ x - y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \begin{cases} 2x+5y-z=0 & (1) \\ 3x+4y+z=0 & (2) \\ x-y+2z=0 & (3) \end{cases} \sim \begin{cases} x-y+2z=0 & (1') \quad [(1)] \\ 3x+4y+z=0 & (2') \\ 5x+9y=0 & (3') \quad [(1)+(2)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=0 & (1'') \\ 5x+9y=0 & (2'') \quad [2(2')-(1')] \\ 5x+9y=0 & (3'') \end{cases}$$

$$x = t \Rightarrow y = -\tfrac{5}{9}t \Rightarrow z = \tfrac{1}{2}\left(-t-\tfrac{5}{9}t\right) = -\tfrac{7}{9}t$$

varmed $(-9, 5, 7)$ är en e-vektor för λ_1

$\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} x + 5y - z = 0 & (1) \\ 3x + 3y + z = 0 & (2) \\ x - y + z = 0 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2)$: $4x + 8y = 0$

$y = t \Rightarrow x = -2t \Rightarrow z = 2t + t = 3t$

varmed $(-2, 1, 3)$ är en e-vektor för λ_2.

$\lambda_3 = 7$ $\begin{cases} -5x + 5y - z = 0 & (1) \\ 3x - 3y + z = 0 & (2) \\ x - y - 5z = 0 & (3) \end{cases}$

$(1')$: $[(2) + 2(3)]$: $5x - 5y - 9z = 0$

~~borde blivit t+z...~~

$(1) + (1')$: $0x + 0y - 10z = 0 \Rightarrow z = 0$

$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $x = y = t$

varmed $(1, 1, 0)$ är en e-vektor för λ_3

E-värdena λ och motsvarande egenvektorer $\mathbb{X}$

i	λ_i	$\mathbb{X}_i$
1	0	$(-9, 5, 7)$
2	1	$(-2, 1, 3)$
3	7	$(1, 1, 0)$

10.6 Visa $\mathbf{x}$ e-vektor till $A \Rightarrow \mathbf{x}$ e-vektor till B.

$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow B\mathbf{x} = (A^3 - 5A^2 + A + 7I)\mathbf{x} =$

$= A^3\mathbf{x} - 5A^2\mathbf{x} + A\mathbf{x} + 7\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \text{enl. Lemma 1} \\ \text{s. 240} \end{Bmatrix}$

$= \lambda^3\mathbf{x} - 5\lambda^2\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} + 7\mathbf{x}$

$= (\lambda^3 - 5\lambda^2 + \lambda + 7)\mathbf{x}$

$\Rightarrow$ B har e-värdet $\lambda^3 - 5\lambda^2 + \lambda + 7$ med e-vektorn $\mathbf{x}$ samma som för A med e-värdet λ.