Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
14 januari, 2006 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 070-306 95 89, 035-16 76 53.

1. Formulera och bevisa produktregeln för determinanter. (3p)

   Lösning: (Se Linjär algebra av Sparr, s. 203.) $\square$

2. Lös ekvationssystemet $\left\{\begin{array}{rcr} x-y+2z &=& 4 \\ 2x+y-z &=& 1 \\ 3x+3y-4z &=& -2 \end{array}\right.$ (3p)

   Lösning:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+2z &=& 4 \\ 2x+y-z &=& 1 \\ 3x+3y-4z &=& -2 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcr} x-y+2z &=& 4 \\ 5x+y &=& 6 \\ 5x+y &=& 6 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 6-5t \\ z &=& 5-3t \end{array}\right.$$

$\square$

3. Visa att vektorerna $\frac{1}{3}(1,2,-2)$, $\frac{1}{3}(2,1,2)$, $\frac{1}{3}(2,-2,-1)$ utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^3$.(3p)

   Lösning:

   Vektorerna är ortogonala ty:
   $\frac{1}{3}(1,2,-2)\cdot\frac{1}{3}(2,1,2)=\frac{1}{9}(2+2-4)=0$
   $\frac{1}{3}(1,2,-2)\cdot\frac{1}{3}(2,-2,1)=\frac{1}{9}(2-4+2)=0$
   $\frac{1}{3}(2,1,2)\cdot\frac{1}{3}(2,-2,-1)=\frac{1}{9}(4-2-2)=0.$

   Vektorerna är normerade ty:
   $|\frac{1}{3}(1,2,-2)|^2=\frac{1}{9}(1+4+4)=1$
   $|\frac{1}{3}(2,1,-2)|^2=\frac{1}{9}(4+1+4)=1$
   $|\frac{1}{3}(2,-2,1)|^2=\frac{1}{9}(4+4+1)=1$

   Eftersom basen är ortogonal och normerad är den en ON-bas. $\square$

4. För vilka värden på a utgör vektorerna $(a-5,1,2)$, $(1,a-5,2)$ och $(2,2,a-2)$ en bas för $\mathbb{R}^3$? (3p)

Lösning: Låt $\boldsymbol{u}=(a-5,1,2)$, $\boldsymbol{v}=(1,a-5,2)$, $\boldsymbol{w}=(2,2,a-2)$. Då är vektorprodukten $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ ortogonal mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Därmed kan inte $\boldsymbol{w}$ vara ortogonal mot $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ om vektorerna ska vara linjärt oberoende, dvs skalärprodukten måste vara skild från noll. Men trippelprodukten $\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ är ju inget annat än determinanten av matrisen med kolonnerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ som är nollskild närhelst matrisen är inverterbar, dvs kolonnerna linjärt oberoende. Vi får att

$$\begin{vmatrix} a-5 & 1 & 2 \\ 1 & a-5 & 2 \\ 2 & 2 & a-2 \end{vmatrix} = \{\text{utv. efter första raden}\} =$$

$$= (a-5)\begin{vmatrix} a-5 & 2 \\ 2 & a-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a-2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & a-5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-5)((a-5)(a-2)-4) - ((a-2)-4) + 2(2-2(a-5)) =$$

$$= a^3-7a^2+6a-5a^2+35a-30-a+6-4a+24 = a(a^2-12a+36) = a(a-6)^2.$$

Alltså $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ linjärt oberoende, dvs $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ bas för $\mathbb{R}^3$ omm $a\neq 0$ och $a\neq 6$.

□

5. Låt ℓ_1 och ℓ_2 vara linjerna $\ell_1 : \begin{cases} x = 2+s \\ y = 3+2s \\ z = 1+3s \end{cases}$ $\ell_2 : \begin{cases} x = 3-t \\ y = -5+3t \\ z = 2-2t \end{cases}$

   (a) Visa att ℓ_1 och ℓ_2 skär varandra. (3p)

   (b) Ange på affin form det plan som spänns av ℓ_1 och ℓ_2. (3p)

Lösning:

(a) $\begin{cases} 2+s &= 3-t \\ 3+2s &= -5+3t \\ 1+3s &= 2-2t \end{cases} \sim \begin{cases} s+t &= 1 \\ 2s-3t &= -8 \\ 3s+2t &= 1 \end{cases}$

$\Rightarrow\ -8 = 2s-3(1-s) = 5s-3 \ \Rightarrow\ s = -5/5 = -1 \ \Rightarrow\ t = 1-(-1) = 2.$

Alltså skär linjerna i punkten $(x,y,z)=(1,1,-2)$.

(b) Riktningsvektorer är $\boldsymbol{r}_1=(1,2,3)$ och $\boldsymbol{r}_2=(1,-3,2)$ varmed en normal är $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2 = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\right) = (13,1,-5)$

så planet är $13x+y-5z=d$ där konstanten d är bestämd av att punkterna på ℓ_1 och ℓ_2 ska ligga i planet. T.ex. ligger punkten $(2,3,1)$ på ℓ_1, och för att denna ska ligga i planet måste $d = 13\cdot 2+3-5\cdot 1 = 24$. Alltså är planet $13x+y-5z=24$.

□

6. Bestäm $\sin([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])$ och $\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])$ då $\boldsymbol{u}=(0,1,2)$ och $\boldsymbol{v}=(-1,2,1)$. (3p)

Lösning: Enl. definitionen av skalärprodukt är $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$. Emellertid kan skalärprodukten även beräknas som $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0+2+2=4$. Vidare är $|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|=\sqrt{1+4}\sqrt{1+4+1}=\sqrt{30}$ varmed $\cos[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=4/\sqrt{30}$.

Enl. defintionen av vektorprodukt är $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\sin[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$. Beloppet av vektorprodukten kan dock även beräknas $\left|\left(\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}\right)\right|=|(-3,-2,1)|=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$ varmed $\sin[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=\sqrt{14}/\sqrt{30}=\sqrt{7/15}$.

(Detta kan även kontrolleras med trigonometriska ettan:
$\cos^2[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]+\sin^2[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=\frac{4^2}{30}+\frac{7}{15}=1$, ok!) □

7. Låt $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&1\end{bmatrix}$. Beräkna

(a) A^2+2A^{-1}. (3p)

(b) $A^{2006}\boldsymbol{v}$ där $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor som svarar mot egenvärdet -1. (3p)

Lösning:

(a) $A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5&5\\6&11&10\\4&7&8\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-1&-1\\-2&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^2+2A^{-1}=\begin{bmatrix}7&4&4\\4&11&12\\4&8&7\end{bmatrix}$.

(b) Enl. definitionen av egenvektor är $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ varmed $A^{2006}\boldsymbol{v}=A^{2005}(A\boldsymbol{v})=A^{2005}\lambda\boldsymbol{v}=\lambda A^{2005}\boldsymbol{v}=\lambda A^{2004}(A\boldsymbol{v})=\lambda A^{2004}(\lambda\boldsymbol{v})=\lambda^2A^{2004}\boldsymbol{v}=\ldots=\lambda^{2006}\boldsymbol{v}$. Eftersom egenvärdet var $\lambda=-1$ är därmed $A^{2006}\boldsymbol{v}=(-1)^{2006}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$. En egenvektor $\boldsymbol{v}$ som svarar mot egenvärdet -1 fås av att lösa ekvationen $A\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$

$$\text{dvs}\begin{cases}v_1+v_2+v_3&=&-v_1\\v_1+2v_2+3v_3&=&-v_2\\v_1+2v_2+v_3&=&-v_3\end{cases}\sim\begin{cases}2v_1+v_2+v_3&=&0\\v_1+3v_2+3v_3&=&0\\v_1+2v_2+2v_3&=&0\end{cases}\sim$$

$$\sim\quad\begin{matrix}\\(2)-(3):\\(1)-(2)+(3):\end{matrix}\begin{cases}2v_1+v_2+v_3&=&0\\v_2+v_3&=&0\\2v_1&=&0\end{cases}\Rightarrow\quad\boldsymbol{v}=(0,1,-1).$$

Alltså är $A^{2006}\boldsymbol{v}=(0,1,-1)$. □

8. Avbildningen F definieras av $F(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \times (1,1,1)$ och avbildningen G är speglingen i planet $x - y + z = 0$. Bestäm matrisen för den linjära avbildningen $F \circ G$. (3p)

Lösning: $F(\boldsymbol{u}) = (u_1, u_2, u_3) \times (1,1,1) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$
$= (u_2 - u_3, u_3 - u_1, u_1 - u_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 - u_3 \\ u_3 - u_1 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$

G avbildar spegling i $x - y + z = 0$. Normalen är $(1,-1,1)$. Ortogonalprojektionen $\boldsymbol{v}_N$ av $\boldsymbol{v}$ på normalen blir $\boldsymbol{v}_N = \dfrac{\boldsymbol{v} \cdot (1,-1,1)}{|(1,-1,1)|^2} \cdot (1,-1,1) = \frac{1}{3}(v_1 - v_2 + v_3) \cdot (1,-1,1).$
Eftersom projektionen $\boldsymbol{v}_P$ av $\boldsymbol{v}$ på planet blir $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_N$ så blir speglingen
$\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{v}_N = (v_1, v_2, v_3) - \frac{2}{3}(v_1 - v_2 + v_3)(1,-1,1) =$
$= (v_1 - \frac{2}{3}(v_1 - v_2 + v_3), v_2 + \frac{2}{3}(v_1 - v_2 + v_3), v_3 - \frac{2}{3}(v_1 - v_2 + v_3)) =$
$= \frac{1}{3}(v_1 + 2v_2 - 2v_3, 2v_1 + v_2 + 2v_3, -2v_1 + 2v_2 + v_3) \Rightarrow B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

Därmed är avbildningsmatrisen för $F \circ G$

$$AB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

□