Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
20 mars, 2004 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

1. Antag att $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är icke-parallella vektorer i planet och att $\boldsymbol{w}$ är en vektor i samma plan. Visa att det då finns $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ så att $\boldsymbol{w} = x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v}$. (3p)

   Lösning: (Se existensdelen av beviset av Sats 2 i boken, s. 29.) □

2. Visa att $\det A$ är antingen 1 eller -1 om A är en ortogonalmatris. (3p)

   Lösning: (Se beviset av Sats 5 (ii) i boken, s. 204.) □

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + (1{+}\alpha)z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ (1{-}\alpha)x + y + z &= 1 \end{cases} \qquad (3p)$$

Lösning: Genom Gausseliminering har vi då $\alpha \neq 0$ att

$$\begin{cases} x + \alpha y + z &= 1 \\ (1-\alpha)y + \alpha z &= 0 \\ (1-\alpha-1)y + (1-\alpha^2-1)z &= 1-\alpha-1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + \alpha y + z &= 1 \\ (1-\alpha)y + \alpha z &= 0 \\ -\alpha y - \alpha^2 z &= -\alpha \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + \alpha y + z &= 1 \\ (1-\alpha)y + \alpha z &= 0 \\ (\alpha^2 - \alpha^2(1-\alpha))z &= -\alpha(1-\alpha) \end{cases} \sim \begin{cases} x + \alpha y + z &= 1 \\ (1-\alpha)y + \alpha z &= 0 \\ z &= -\frac{1-\alpha}{\alpha^2} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x &= 1 - 1 - \frac{\alpha-1}{\alpha^2} = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \\ y &= \frac{1}{1-\alpha}\alpha = \frac{1}{\alpha} \\ z &= \frac{\alpha-1}{\alpha^2} \end{cases}.$$

Då $\alpha = 0$ är ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z &= 1 \\ y &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 1-t \end{cases} \quad \text{där } t \in \mathbb{R}.$$

Om $\alpha \neq 0$ så är lösningen $(x, y, z) = \frac{1}{\alpha^2}(1{-}\alpha,\ \alpha,\ \alpha{-}1)$, och om $\alpha = 0$ så är lösningsmängden linjen i x-z-planet som beskrivs av $(x, y, z) = (t, 0, 1-t),\ t \in \mathbb{R}$.

□

4. Bestäm ekvationen (affin form) för planet genom punkterna $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$ och $R = (3, 2, 1)$. (3p)

Lösning: På parameterform blir planet

$$\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 1 + s + t \\ z &= 1 + 2s \end{cases} \sim \begin{cases} y - s - t &= 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) &= t \\ \frac{1}{2}(z-1) &= s \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y - \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{2}(z-1) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -x + 2y - z + 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x - 2y + z = 0}$$

□

5. Beräkna komposanterna av vektorn $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ så att den ena ligger i planet $\pi : x + y + z = 1$ och den andra är en multipel av normalvektorn till π. (3p)

Lösning: Planet har normalvektor $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ varmed den ena komposanten måste vara projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n} = \frac{(1,2,3)\cdot(1,1,1)}{1^2+1^2+1^2}(1,1,1) = (2,2,2).$$

Därmed kan vi sluta oss till att den andra komposanten måste vara $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1 = (1-2, 2-2, 3-2) = (-1, 0, 1)$ som ligger i det (till origo translaterade) planet $\pi' : x + y + z = 0$.

Alltså: $\boxed{\text{komposanterna är } \boldsymbol{u}_1 = (2,2,2) \text{ och } \boldsymbol{u}_2 = (-1,0,1).}$

□

6. Vad är A^{-1} (uttryckt endast med hjälp av A) om $A^3 + 2A - 2I = A^2$? (3p)

Lösning: A^{-1} definieras av att $AA^{-1} = I$. Vi har att $A^3 + 2A - 2I = A^2 \;\Leftrightarrow\; A^3 + 2A - A^2 = 2I \;\Leftrightarrow\; A(A^2 - A + 2I) = 2I \;\Leftrightarrow\; A(\frac{1}{2}(A^2 - A + 2I)) = I \;\Leftrightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - A + 2I)$. Emellertid, eftersom $A^3 + 2A - 2I = A^2$ så är $A^3 + 2A = A^2 + 2I$ dvs $A^3 + A = A^2 - A + 2I$.

Alltså är $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A^3 + A).}$

□

7. Flygbjörn flyger med ett flygplan längs linjen $11x + 55 = 2y = z - 25$ och Vindela flyger längs $5x - 30 = 30y + 10 = z - 100$ där enheten är 100 meter. Om planen är närmare varandra än 500 meter kan Flygbjörn och Vindela vinka till varandra. Säkerhetsavståndet mellan flygplan är 300 meter. Finns det någon möjlighet för dem att vinka utan risk för kollision? (5p)

Lösning: Linjerna
$\ell_1 : 11x + 55 = 2y = z - 25$ och $\ell_2 : 5x - 30 = 30y + 10 = z - 100$
ger t.ex. punkterna $P_1 : (-5, 0, 25)$ och $P_2 : (-7, -11, 3)$ på ℓ_1 och
$Q_1 : (8, 0, 110)$ och $Q_2 : (2, -1, 80)$ på ℓ_2.
Därmed är riktningsvektorer för ℓ_1 resp. ℓ_2:
$\boldsymbol{r}_1 = \overline{P_1P_2} = (-5 - (-7), 0 - (-11), 25 - 3) = (2, 11, 22)$
$\boldsymbol{r}_2 = \overline{Q_1Q_2} = (8 - 2, 0 - (-1), 110 - 80) = (6, 1, 30)$.
En vektor mellan ℓ_1 och ℓ_2 är
$\boldsymbol{x} = \overline{P_1Q_1} = (8 - (-5), 0, 110 - 25) = (13, 0, 85)$ och en vektor som är ortogonal mot både ℓ_1 och ℓ_2 är $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \left(\begin{vmatrix} 11 & 22 \\ 1 & 30 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 22 \\ 6 & 30 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \right) = (308, 72, -64)$ så som normalvektor kan vi välja $\frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = (77, 18, -16)$. Vektorn $\boldsymbol{u}$:s projektion på normalvektorn $\boldsymbol{n}$ blir då den vektor mellan ℓ_1 och ℓ_2 som är ortogonal mot båda linjerna. Därmed blir projektionens längd det minsta möjliga avståndet mellan planen:

$$\left| \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2} \boldsymbol{n} \right| = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|13 \cdot 77 + 0 - 85 \cdot 16|}{\sqrt{77^2 + 18^2 + 16^2}} = \frac{|1001 - 1360|}{\sqrt{5929 + 334 + 256}} = \frac{359}{\sqrt{6509}}.$$

Här är $\frac{359}{\sqrt{6509}} < \frac{360}{\sqrt{64}\sqrt{100}} = \frac{9}{2} = 4.5 < 5$ och $\frac{359}{\sqrt{6509}} > \frac{3 \cdot 99 + 54}{\sqrt{81 \cdot 100}} = \frac{9(33+6)}{9 \cdot 10} = 3.9 > 3$, dvs $3 < \frac{359}{\sqrt{6509}} < 5$ och eftersom enheten var 100 meter är det minsta avståndet mellan planen mellan 300 och 500 meter varmed svaret blir:

$\boxed{\text{ja, det är möjligt att Flygbjörn och Vindela kan vinka utan kollisionsrisk.}}$ □

8. Låt $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna A:s egenvärden. (3p)

(b) Antag att $\boldsymbol{x}_1 = [1 \quad 1]^T$ och att $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$
Bestäm gränsvärdet $\boldsymbol{x}$ så $\boldsymbol{x}_{k+1} \to \boldsymbol{x}$ då $k \to \infty$ under antagandet att gränsvärdet existerar. (4p)
(Tips: summan av vektorelementen bevaras under multiplikation med A.)

Lösning:

(a) $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} - \lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{5} - \lambda)(\frac{3}{5} - \lambda) - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} =$

$= \frac{3}{25} - (\frac{1}{5} + \frac{3}{5})\lambda + \lambda^2 - \frac{8}{25} = \lambda^2 - \frac{4}{5}\lambda - \frac{1}{5} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{5}} = \frac{2}{5} \pm \frac{3}{5}$

Alltså: egenvärdena är $\boxed{\lambda_1 = 1 \text{ och } \lambda_2 = -\frac{1}{5}.}$

(b) Under antagandet att gränsvärdet $\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$ existerar är
$\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_{k+1} = \lim_{k\to\infty} A\boldsymbol{x}_k = A \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = Ax$.
Med andra ord är gränsvärdet $\boldsymbol{x}$ lösningen till ekvationen $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$,
dvs $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till A som svarar mot egenvärdet $\lambda_1 = 1$.
Vi får

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = x_1 \\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 = x_2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 5x_2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = t\,[1 \quad 2]^T$$

För att summan av elementen ska bevaras då vi börjat med $\boldsymbol{x}_1 = [1 \quad 1]^T$ måste summan $1+1 = 2$ även vara summan av $t + 2t = 3t$, dvs $t = 2/3$ varmed gränsvärdesvektorn är $\boxed{\boldsymbol{x} = [\,\frac{2}{3} \quad \frac{4}{3}\,]^T.}$

$\square$