Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
5 juni, 2004 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad.

1. Antag att A är en $m\times n$-matris och B en $n\times k$-matris. Visa att $(AB)^T = B^TA^T$. (3p)

   Lösning: (Se Sparr, Sats 2 (iv), s. 124.) $\square$

2. Formulera och bevisa formeln för ortogonal projektion. (3p)

   Lösning: (Se Sparr, Sats 1, s. 65–66.) $\square$

3. Lös ekvationssystemet $(2+k)x + 2ky + 2^kz = k^2$ där $k = -1, 0, 1$. (3p)

   Lösning:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} (2-1)x & -2\cdot 1y & +2^{-1}z & = & (-1)^2 \\ (2+0)x & +0y & +2^0z & = & 0^2 \\ (2+1)x & +2y & +2^1z & = & 1^2 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & -4y & +z & = & 2 \\ 2x & & +z & = & 0 \\ 6x & +4y & +4z & = & 2 \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & -4y & +z & = & 2 \\ 2x & & +z & = & 0 \\ 8x & & +5z & = & 4 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & -4y & +z & = & 2 \\ 2x & & +z & = & 0 \\ & & z & = & 4 \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrcl} & y & & = & \frac{1}{4}(2\cdot(-2)+4-2) = -\frac{1}{2} \\ x & & & = & \frac{1}{2}\cdot(-4) = -2 \\ & & z & = & 4 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcr} y & = & -\frac{1}{2} \\ z & = & -2 \\ x & = & 4 \end{array}\right. \quad \square$$

4. Bestäm arean av den triangel som har hörn i punkterna
   $P = (2,0,1)$, $Q = (2,1,3)$ och $R = (1,-2,0)$. (3p)

   Lösning: Arean av parallellogrammet som spänns av två vektorer, $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, ges av längden av vektorprodukten $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$. Eftersom triangeln som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, är halva pararllellogrammet, är arean av triangeln halva beloppet av vektroprodukten. Låt $\boldsymbol{u} = Q - P = (0,1,2)$ och $\boldsymbol{v} = R - P = (-1,-2,-1)$ så får vi triangelarean som $\frac{1}{2}|(0,1,2)\times(-1,-2,-1)| = \{\text{Sarrus regel}\} = \frac{1}{2}|(1\cdot(-1) - 2\cdot(-2),$ $2\cdot(-1) - 0\ ,\ 0 - 1\cdot(-1))| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+2^2+1^1} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 7} = \sqrt{\frac{7}{2}}$. $\square$

5. Planen $\pi_1 : x - z = 1$ och $\pi_2 : x + y + z = 2$ skär varandra i linjen ℓ.
Beräkna avståndet från punkten $(1, -1, 3)$ till linjen ℓ. (3p)

Lösning: Punkterna $P = (1, 1, 0)$ och $Q = (2, -1, 1)$ ligger i både π_1 och π_2, dvs på skärningslinjen ℓ. Linjen kan därmed bestämmas av att $\ell : (1, 1, 0) + (x, y, z) = (2, -1, 1) \;\Rightarrow\; (x, y, z) = (1, -2, 1) = \boldsymbol{r}_\ell$ är riktningsvektor för ℓ och ℓ kan representeras $(1, 1, 0) + t(1, -2, 1)$. Linjens ekvation kan även ses som en godtycklig punkt på linjen. Därmed är sträckan mellan punkten $(1, -1, 3)$ och $(1, 1, 0)+t(1, -2, 1)$ en sträcka mellan punkten och ℓ. Låt oss kalla linjen genom dessa båda punkter κ. En riktningsvektor, $\boldsymbol{r}_\kappa$, för κ fås av $(1, -1, 3) + (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, -2, 1)$ varmed $\boldsymbol{r}_\kappa = (t, 2-2t, -3+t)$. För kortaste sträcka måste riktningarna skära ortogonalt, dvs $\ell \perp \kappa$: $0 = \boldsymbol{r}_\ell \cdot \boldsymbol{r}_\kappa = (1, -2, 1)\cdot(t, 2-2t, -3+t) = t-4+4t-3+t = -7+6t \;\Rightarrow\; t = 7/6$. Därmed skär linjerna i $R = (1, 1, 0) + \frac{7}{6}(1, -2, 1) = \frac{1}{6}(13, -8, 7)$ för kortaste sträcka som blir $|(1, -1, 3) - R| = |\frac{1}{6}(-7, 2, 11)| = \sqrt{\frac{1}{36}(49 + 4 + 121)} = \sqrt{\frac{174}{36}} = \sqrt{\frac{29}{6}}$. $\square$

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna A:s egenvektorer. (3p)

(b) Beräkna det största elementet i matrisen A^{10}. (3p)

Lösning:

(a) Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; (3 - \lambda)(4 - \lambda) - 1 \cdot 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

Egenvektorer: $\lambda_1 = 2 \;\Rightarrow\; A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3x + y &= 2x \\ 2x + 4y &= 2y \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = t(1, -1),\ t \in \mathbb{R}.$$

$$\lambda_2 = 5 \;\Rightarrow\; A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3x + y &= 5x \\ 2x + 4y &= 5y \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -2x + y &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = t(1, 2),\ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Diagonalisering $A = SDS^{-1}$ där S är den har egenvektorerna som i kolonnerna och D är en matris med egenvärdena i diagonalen och nollor i övrigt. Alltså:
$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ så $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ varmed $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
(vilket kan kontrollräknas!) och
$A^2 = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1}$
$A^3 = A^2A = SD^2S^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$
$\vdots$
$$A^{10} = SD^{10}S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^{10} & 5^{10} \\ -2^{10} & 2\cdot 5^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^{11}+5^{10} & -2^{10}+5^{10} \\ -2^{11}+2\cdot 5^{10} & 2^{10}+2\cdot 5^{10} \end{bmatrix}$$
Det största elementet av dessa är $\frac{1}{3}(2^{10}+2\cdot 5^{10})$

$\square$

7. Beräkna cosinus och sinus för den minsta vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,1,4)$ och $\boldsymbol{v} = (0,1,1)$. (3p)

Lösning: Enligt definitionen av skalärprodukt är $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]) = \sqrt{1+1+16}\sqrt{0+1+1}\,\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]) = 6\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])$. Å andra sidan kan vi beräkna skalärprodukten som $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 1\cdot 0+1\cdot 1+4\cdot 1 = 5$. Alltså är $\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]) = 5/6$.

På samma sätt är enligt definitionen av vektorprodukt $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]) = 6\sin([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])$. Å andra sidan kan vi beräkna vektorprodukten med Sarrus regel som $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = |(1\cdot 1-4\cdot 1, 4\cdot 0-1\cdot 1, 1\cdot 1-1\cdot 0)| = |(-3,-1,1)| = \sqrt{11}$ varmed $\sin([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]) = \sqrt{11}/6$.

(Det kan avslutningsvis vara på sin plats med en liten kontroll av att "trignometriska ettan" är satisfierad: $1 = \cos^2([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])+\sin^2([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]) = \frac{25}{36}+\frac{11}{36} = 1$: ok!) $\square$

8. Lös matrisekvationen $(AX+B)^{-1} = A$ där
$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Inverting (av båda led) ger $AX + B = A^{-1}$.
Subtraktion med B ger $AX = A^{-1} - B$.
Multiplikation med A^{-1} från vänster ger $X = A^{-1}(A^{-1} - B)$.
Eftersom $\det(A) = 5 - 6 = -1$ så är $A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$.
Därmed är $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) =$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -14 \\ -19 & 36 \end{bmatrix}$$ □

9. Ljus faller parallellt med vektorn $\boldsymbol{u} = (1, 2, 5)$ mot planet $\pi : x + y + z = 1$ som har normerad normalvektor $\boldsymbol{n}$. Beräkna längden av $\boldsymbol{n}$:s skugga på π. (3p)

Lösning: Normalvektor till planet är $t(1, 1, 1),\ t \in \mathbb{R}$. Normerad normalvektor är därför $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Välj en punkt (t.ex. $Q = (1, 0, 0)$) i planet π. Normalvektorns "spets" är i punkten $(1, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ och spetsen på skuggan av $\boldsymbol{n}$ är i punkten $P = (1, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) + t(1, 2, 5) = (1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + t, \frac{1}{\sqrt{3}} + 2t, \frac{1}{\sqrt{3}} + 5t)$ där t bestäms av att punkten ska ligga i π, dvs satisfiera ekvationen $x + y + z = 1$. Summering av P:s koordinater ger att $1 = 1 + 3\frac{1}{\sqrt{3}} + 8t = 1 + \sqrt{3} + 8t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\sqrt{3}}{8}$.
Därmed är längden av skuggan $|P - Q| = |(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{3}}{8})| =$
$\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{8} + \frac{3}{64} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{3} - \frac{10}{8} + \frac{75}{64}} = \sqrt{1 - \frac{1+2+5}{4} + \frac{3+75}{64} + \frac{3}{16}} = \sqrt{-1 + \frac{39+6}{32}} =$
$= \sqrt{\frac{13}{16\cdot 2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{13}{2}}$ (vilket är ungefär 0.637).

□