Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
19 mars, 2005 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89)

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://www.hh.se/staff/erja` → `Teaching` → `Matematik 1-20` → `Delkurs 3: Linjär algebra` → `050319: lösning`

1. Bevisa att om $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ så är $\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\,\boldsymbol{v}$ den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$. (3p)

2. Bevisa att om A är en matris med egenvärdet λ så har A^n egenvärdet λ^n. (3p)

3. Låt $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$ och $p_5 = 13$ (de första 6 primtalen). Lös ekvationssystemet $p_k x + p_{k+1} y + p_{k+2} z = p_{k+3}$ då $k = 0, 1, 2$. (3p)

4. För den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gäller att $F(\boldsymbol{u}) = (1, 2)$ och $F(\boldsymbol{v}) = (2, -1)$. Beräkna $F(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v})$. (3p)

5. Bestäm alla tal a sådana att $|(a, 1, 1) \times (2, 1, -1)| = \frac{5}{\sqrt{2}}$. (3p)

6. Lös matrisekvationen $A^2X + A = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, X är en matris av obekanta och 0 är nollmatrisen. (3p)

7. Linjen ℓ_1 går genom punkten $P_1 = (2, -1, 3)$ och har riktningsvektor $\boldsymbol{r}_1 = (1, 2, 3)$. Linjen ℓ_2 går genom punkten $P_2 = (1, 3, 1)$ och har riktningsvektor $\boldsymbol{r}_2 = (2, -1, 1)$. Beräkna minsta avståndet mellan linjerna. (3p)

8. En triangel har hörnen $P_1 = (3, -1, -1)$, $P_2 = (2, -1, 1)$, P_3 och sin tyngdpunkt i $T = (1, 2, 3)$.
   (a) Beräkna P_3. (3p)
   (b) Hur stor är triangelns area? (2p)

9. Låt $\boldsymbol{u} = \left(0, \frac{10}{2\sqrt{n}}, \frac{20}{3\sqrt{n}}, \frac{30}{4\sqrt{n}}, \ldots, \frac{10(n-1)}{n\sqrt{n}}\right)$ och $\boldsymbol{v} = (2, 4, 6, 8, \ldots, 2n)$.
   Bestäm det antal dimensioner $n \in \mathbb{Z}^+$ sådant att $2\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 3\sqrt{5}\,|\boldsymbol{v}|$. (4p)
   Tips: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

LYCKA TILL!