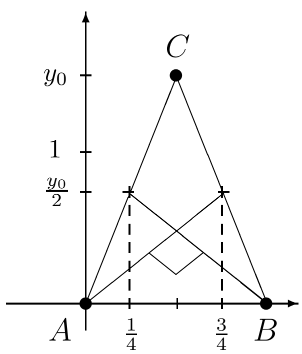
Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
20 augusti, 2005 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 36p. **Betygsgränser**: 15p: betyg G, 26p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

1. ABC är en likbent triangel med basen AB av längd 1. Hur långa är sidorna AC och BC om medianerna från A och B skär varandra under rät vinkel. (3p)

   Lösning: Låt triangeln ABC vara inskriven i ett 2-dimensionellt koordinatsystem med koordinaterna $A : (0, 0)$, $B : (1, 0)$, $C(\frac{1}{2}, y_0)$ där y-koordinaten y_0 till punkten C är sådan att medianerna från A och B blir ortogonala,



   dvs medianerna måste gå genom punkterna A och $M_A : (\frac{3}{4}, \frac{y_0}{2})$ respektive B och $M_B = (\frac{1}{4}, \frac{y_0}{2})$. Riktningarna blir därmed $\boldsymbol{r}_A = A\bar{M}_A = (\frac{3}{4}, \frac{y_0}{2})$ och $\boldsymbol{r}_B = B\bar{M}_B = (\frac{1}{4}, \frac{y_0}{2}) - (1, 0) = (-\frac{3}{4}, \frac{y_0}{2})$. För att skära under rät vinkel måste $0 = \boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_A = (\frac{3}{4}, \frac{y_0}{2}) \cdot (-\frac{3}{4}, \frac{y_0}{2}) = \frac{y_0^2}{4} - \frac{9}{4} \Rightarrow y_0 = \pm 3$, dvs i det här fallet $y_0 = 3$. Därmed är längden av triangelns ben $|(\frac{1}{2}, 3)| = \sqrt{\frac{1}{4} + 9} = \sqrt{27}/2$. □

2. Flygrutter bör kanske sakna skärningspunkter. Undersök om rutterna r_1 genom $(1, 2, 1)$ med riktning $(1, 2, 1)$ och r_2 genom $(1, 3, 2)$ med riktning $(1, 1, 4)$ skär varandra. (3p)

   Lösning: $\ell_1 : \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s + 2 \\ z = s + 1 \end{cases}$ och $\ell_2 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 3 \\ z = 4t + 2 \end{cases}$. Om ℓ_1 och ℓ_2 skär finns det s och t sådana att $\ell_1 = \ell_2$, dvs så att $(s + 1, 2s + 2, s + 1) = (t + 1, 2t + 2, 4t + 2)$,

   dvs $\begin{cases} s - t = 0 \;\Rightarrow\; s = t \;(1) \\ 2s - t = 1 \;\overset{(1)}{\Rightarrow}\; t = 1 \;(2) \\ s - 4t = 1 \;\overset{(2)}{\Rightarrow}\; -3t = 1 \;\overset{(2)}{\Rightarrow}\; -3 = 1 \;\Rightarrow\Leftarrow \end{cases}$

   Alltså finns inga sådana s och t. Alltså skär inte linjerna. □

3. Bestäm en eventuell invers till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

(3p)

Lösning: $\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & -8 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -14 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$

Alltså är $A^{-1} = \begin{bmatrix} -14 & 6 & -9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\square$

4. Triangeln ABC har hörnen i $A : (1, 0, 1)$, $B : (1, 1, 3)$ och $C : (3, 1, 3)$. Bestäm fotpunkten av höjden från A. (3p)

Lösning: Genom B och C går linjen ℓ. Den bestämmer tillsammans med A den punkt där en linje, k, genom A skär ℓ vinkelrätt.

$\ell : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

(Fås av att då $s = 0$ är punkten B, och då $s = 1$ är punkten C.)

En punkt på linjen: $(1 + 2s, 1, 3)$.

Linken k från A, $k : \begin{cases} x = 1 + 2st \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Riktningsvektorer: $\mathrm{r}_\ell = (2, 0, 0)$ och $\mathrm{r}_k = (2s, 1, 2)$.

Ska nu bestämma det s sådant att $\mathrm{r}_\ell \perp \mathrm{r}_k$: $0 = (2, 0, 0) \cdot (2s, 1, 2) = 4s \;\Rightarrow\; s = 0$.

Alltså är fotpunkten i punkten $B = (1, 1, 3)$. $\square$

5. Spjutkastaren Casta Long kastar alltid rätlinjigt. Casta kastar sitt spjut från punkten $A:(1,0,1)$ med riktningsvektor $\boldsymbol{v}=(1,1,1)$. Hur nära kommer spjutet ett snöre som är spänt mellan punkterna $B:(4,2,4)$ och $C:(2,0,6)$. (3p)

Lösning: $\ell:\begin{cases} x=s+1\\ y=s\\ z=s+1\end{cases}$ där $s\geq 0$ och $k:\begin{cases} x=t+2\\ y=t\\ z=6-t\end{cases}$ där $0\leq t\leq 2$.

Normalen till det plan som spänns av ℓ och k är

$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_\ell\times\boldsymbol{r}_k=(1,1,1)\times(1,1,-1)=\left(\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\right)=(-2,2,0)$.

En punkt på ℓ är $(1,0,1)$ och på k är $(4,2,4)$ varmed en riktningsvektor för en sträckan mellan linejerna är $\boldsymbol{u}=(4,2,4)-(1,0,1)=(3,2,3)$ och längden av dess projektion på $\boldsymbol{n}$ blir $|\boldsymbol{u}'|=|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n}|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(3,2,3)\cdot(-2,2,0)|}{|(-2,2,0)|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}|-6+4+0|=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\square$

6. Bestäm en ON-bas innehållande en normalvektor till planet $x+y=z$. Bestäm sedan koordinaterna till vektorn $(1,2,1)$ i den valda ON-basen. (3p)

Lösning: Planet $x+y-z=0$ har normal $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$. Ortogonala mot den är t.ex. två ortogonala vektorer i planet $\boldsymbol{u}=(1,1,2)$ och $\boldsymbol{v}=(1,-1,0)$. Normeras dessa fås basen $\{\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2),\ \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\}$.

Koordinaterna för $(1,2,1)$ fås sedan genom att projicera punkten på koordinataxlarna:

$$\left|\frac{(1,2,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)}{|\frac{1}{\sqrt{3}}|(1,1,-1)|^2}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,2,1)\cdot(1,1,-1)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\left|\frac{(1,2,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)}{|\frac{1}{\sqrt{6}}|(1,1,2)|^2}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)\right|=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\cdot(1,1,2)=\frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$\left|\frac{(1,2,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)}{|\frac{1}{\sqrt{2}}|(1,-1,0)|^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\cdot(1,1,2)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alltså är koordinaterna för $(1,2,1)$ i den valda ON-basen $(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{5}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. $\square$

7. De punktformade fallskärmshopparna Fallhit och Falldit kommer på banor vinkelräta mot jordplanet $x+2y+3z=6$. Beräkna avståndet mellan landningspunkterna om Fallhit passerar punkten $A:(1,2,3)$ och Falldit passerar punkten $B:(2,2,2)$. (3p)

   Lösning: Normalen till jordplanet är $(1,2,3)$.
   En linje genom A i normalens riktning är således
   $\ell : \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2+2s \\ z = 3+3s \end{cases}$
   Linjens skärning av planet, punkten A_0, är där $(1+s)+2(2+2s)+3(3+3s) = 6 \Rightarrow 14+14s = 6 \Rightarrow s = -\frac{4}{7} \Rightarrow A_0 = \frac{1}{7}(3,6,9)$. Motsvarande punkt B_0 där linjen $k : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+2t \\ z = 2+3t \end{cases}$ skär planet fås av $(2+t)+2(2+2t)+3(2+3t) = 6 \Rightarrow 12+14t = 6 \Rightarrow t = -\frac{3}{7} \Rightarrow B_0 = \frac{1}{7}(11,8,5)$. $|A_0 - B_0| = \sqrt{\frac{1}{7^2}((11-3)^2+(8-6)^2+(9-5)^2)} = \frac{1}{7}\sqrt{64+4+16} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$. □

8. Lös för alla värden på parametrarna a och b ekvationssystemet:

$$\begin{cases} ax & +y & +bz & = & 0 \\ x & +ay & +bz & = & 0 \\ ax & +ay & +az & = & a \end{cases}$$

   (5p)

   Lösning: (Kommer snart!) □

9. Låt F vara en linjär avbildning i rummet som har egenvektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ med egenvärden 10 respektive 20. Avgör om $2x+y$ är en egenvektor till F. (5p)

   Lösning: (Kommer snart!) □

10. Låt F vara en linjär avbildning med matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   relativt basen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Bestäm en egenvektorsbas relativt F. Hur ser matrisen till F ut relativt denna bas? (5p)

   Lösning: (Kommer snart!) □