Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
4 juni, 2005 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

1. Visa att $\{A$ har egenvärdet λ med egenvektorn $X\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{A + dI$ har egenvärdet $\lambda + d$ med egenvektorn $X\}$. (2p)

Lösning: (Se Sparr, Lemma 1, s. 240–241.) □

2. Punkten A ligger mitt emellan punkten $B = (1, 2, 3)$ och punkten $C = (5, 0, 3)$. Bestäm ekvationen för den linje som går genom A och punkten $D = (2, -1, -2)$. (3p)

Lösning: $A = \frac{1}{2}(B + C) = (3, 1, 3)$
Riktningsvektor för linjen genom A och D är
$A - D = (3 - 2, 1 + 1, 3 + 2) = (1, 2, 5)$ varmed linjen är
på parameterform: $\ell : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$
och på affin form: $x - 3 = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 3}{5}$. □

3. En triangel har hörn i $(0, -1, 2)$, $(-2, 0, 1)$ och $(-1, -2, 0)$. Beräkna triangelns
   (a) tyngdpunkt (dvs medianernas skärningspunkt). (2p)
   (b) area. (3p)

Lösning:

(a) Låt $A = (0, -1, 2)$, $B = (-2, 0, 1)$, $C = (-1, -2, 0)$. Då är
tyngdpunkten $= \frac{1}{3}(A + B + C) = (-1, -1, 1)$.

(b) Arean = halva parallellogramarean $= \frac{1}{2}|\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ |$.
$\overrightarrow{AB}\ \ // \ A - B = (2, -1, 1)$
$\overrightarrow{AC}\ \ // \ A - C = (1, 1, 2)$
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-3, 0, 3)$
Arean $= \frac{1}{2}|\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ | = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 0 + 9} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ □

4. Lös ekvationssystemet $6x + 4^k y + 64^{1/k} z = (\sqrt{4})^{k-1}$ där $k = 1, 2, 3$. (3p)

Lösning:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 64z &= 1 \\ 6x + 16y + 8z &= 2 \\ 6x + 64y + 4z &= 4 \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} x &= 13/55 \\ y &= 9/220 \\ z &= -1/110 \end{cases} \qquad \square$$

5. Bestäm (minsta) avståndet mellan punkten $(1, -1, 3)$ och skärningslinjen mellan planen $x - z = 1$ och $x + 2y + 3z = 1$. (3p)

Lösning: Ett sätt att lösa denna uppgift hittar man i Sparr på sidorna 78–79. Jag ger dock ett (något utförligare) alternativt resonemang:

Skärningslinjen $\ell : \begin{cases} x - z &= 1 \\ z + 2y + 3z &= 1 \end{cases} \overset{z=t}{\sim} \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= \frac{1}{2}(1 - (1 + t) - 3t) = -2t \\ z &= t \end{cases}$

har riktningsvektor $\boldsymbol{r} = (1, -2, 1)$. En normalvektor $\boldsymbol{n}$ till linjen ℓ är då $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ sådan att $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = 0$, dvs $a - 2b + c = 0$, dvs $\boldsymbol{n} = (a, b, 2b - a)$. Antag nu att vi står i den punkt P (på linjen ℓ) sådan att om vi rör oss vinkelrätt mot ℓ (dvs längs $\boldsymbol{n}$) så ska vi hamna i $Q = (1, -1, 3)$. Denna punkt P måste satisfiera $(1 + t, -2t, t) + (a, b, 2b - a) = (1, -1, 3)$ varmed

$$\begin{cases} 1 + t + a &= 1 \\ -2t + b &= -1 \\ t + 2b - a &= 3 \end{cases} \sim \begin{cases} t - a + 2b &= 3 \\ t + a &= 0 \\ 5t - a &= 5 \end{cases} \sim \begin{cases} t - a + 2b &= 3 \\ t + a &= 0 \\ 6t &= 5 \end{cases} \sim \begin{cases} t &= 5/6 \\ a &= -5/6 \\ b &= 2/3 \end{cases}$$

Därmed är $P = (1 + \frac{5}{6}, -2 \cdot \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ och avståndet mellan P och Q är

$|P - Q| = |(\frac{11}{6}, -\frac{10}{6}, \frac{5}{6}) - (1, -1, 3)| = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{16}{36} + \frac{169}{36}} = \sqrt{\frac{210}{36}} = \sqrt{35/6}$. $\square$

6. Lös matrisekvationen $(A+X)(A+I)=A$ där $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Med beteckningarna I för enhetsmatrisen och N för nollmatrisen har vi $(A+X)(A+I)=A \;\Rightarrow\; A^2+A+XA+X=A \;\Rightarrow\; A^2+X(A+I)=N \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; X(A+I)=-A^2 \;\Rightarrow\; X=-A^2(A+I)^{-1}$. Vi har att $A^2=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Vidare är $A+I=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ så $(A+I)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ varmed $X=-A^2(A+I)^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -7 & -7 \\ -7 & 5 & -7 \\ -7 & -7 & 5 \end{bmatrix}$. □

7. Låt π vara ett plan med normalvektor $\boldsymbol{n}=(1,2,3)$ och låt $\boldsymbol{x}$ vara en godtycklig vektor. Ange den linjära avbildning som projicerar $\boldsymbol{x}$ ortogonalt på planet π. (4p)

Lösning: Ortogonala projektionen av $\boldsymbol{x}$ på normalvektorn $\boldsymbol{n}$ är

$$\boldsymbol{x}_1=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\cdot\boldsymbol{n}$$

varmed ortogonala projektionen av $\boldsymbol{x}$ på planet π är

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\cdot\boldsymbol{n}=(x_1,x_2,x_3)-\tfrac{x_1+2x_2+3x_3}{1+4+9}(1,2,3)=$$
$$=(x_1-\tfrac{x_1}{14},x_2-\tfrac{2x_2}{14},x_3-\tfrac{9x_3}{14})=\tfrac{1}{14}(13x_1,10x_2,5x_3).$$

Alltså är den linjära avbildningen: F där $F(\boldsymbol{x})=\frac{1}{14}(13,10,5)\cdot\boldsymbol{x}^T$.

□

8. Antag att A och B är symmetriska $n\times n$-matriser. Givet att man har beräknat produkten AB, hur kan man använda detta resultat för att beräkna BA utan att utföra matrismultiplikationen? (3p)

Lösning: För alla matriser gäller att $(AB)^T=B^TA^T$. Om nu A och B är symmetriska är $A^T=A$ och $B^T=B$ varmed $(AB)^T=BA$. Detta innebär att om man vet vad AB är behöver man bara transponera denna produktmatris för att få reda på vad multiplikationen BA resulterar i. □

9. I en $n \times n$-matris $A_n = \{a_{ij}\}$ är $a_{ij} = \min(i, j)$. Beräkna $\det A_n$ då $n \geq 2$. (4p)

Lösning: Vi kollar först några specialfall:

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{utveckling efter} \\ \text{första raden} \end{array} \right\} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Kan det kanske vara så att $\det A_n = 1$ för alla $n \geq 2$?
För att kunna leda ett sådant påstående i bevis kan vi nyttja induktion.
Basfallet ($n = 2$) har vi redan klarat av.

Induktionsantagande: $\det A_n = 1$
Induktionssteg: Vi ska visa att $\det A_{n+1} = 1$.

$\det A_{n+1}$ är $(n+1) \times (n+1)$-detrminanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$$

Subtraktion av den första raden från de övriga raderna ger den likvärda $(n+1) \times (n+1)$-determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & 4 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

Utveckling efter första kolonnen gör att vi får $n+1$ $n \times n$-determinanter. Emellertid är det endast den första termen som är skild från noll!!

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^n \cdot 0$$

Men detta är ju $\det A_n$ som är 1 enligt induktionsantagandet. Därmed är enligt induktionsprincipen $\det A_n = 1$ för alla $n \geq 2$. □