Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs

11 januari, 2003 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://www.hh.se/staff/erja` → `teaching` → `matematik,distanskurs` → `moment 2, linjär algebra` → `030111: lösning`

1. Lös ekvationen $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ med avseende på $\boldsymbol{x}$ där
$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$ (4p)

2. Låt linjerna ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 vara definierade av
$\ell_1 : x + 2y = 1 \qquad \ell_2 : 2x - y = 1 \qquad \ell_3 : 3x + y = 1.$
Beräkna tyngdpunkten i den triangel som begränsas av ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. (3p)

3. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 1^2x + 2^2y + 3^2z = 4^2 \\ 2^2x + 3^2y + 4^2z = 5^2 \\ 3^2x + 4^2y + 5^2z = 6^2 \end{cases}$$ (3p)

4. Låt $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Beräkna egenvärden λ_1, λ_2 och egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ för A. (2p)
   (b) Beräkna $\mathsf{A}^{2003}\boldsymbol{v}$ där $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor som svarar mot det negativa egenvärdet. (2p)

5. Antag att $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + \alpha\boldsymbol{e}_2$ och att $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ m.a.p. basen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.
För vilka reella α har $\boldsymbol{u}$, m.a.p. basen $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$, längden $2\sqrt{2}$? (3p)

6. Vektorn $(3, 2, 1)$ projiceras ortogonalt på planet $x + 2y + 3z = 0$.
Beräkna längden av projektionen. (3p)

7. Formulera och bevisa produktregeln för determinanter. (4p)

8. Antag att A är en inverterbar matris.
Visa att $\det((\mathsf{A}^n)^{-1}) = (\det(\mathsf{A}))^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. (3p)

9. Antag att A är en symmetrisk ortogonal matris och låt $\mathsf{A}^0 := \mathsf{I}$.
Visa att $(\mathsf{A} + \mathsf{I})^{100} = 2^{99}(\mathsf{A} + \mathsf{I})$. (Tips: $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$, $n \in \mathbb{N}$.) (3p)

LYCKA TILL!