Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
26 april, 2003 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://www.hh.se/staff/erja` →`teaching` →`matematik,distanskurs` →`moment 2, linjär algebra` →`030426: lösning`

1. Lös ekvationssystemet $1^k\alpha + 2^k\beta + 3^k\gamma = k$ där $k = 0, 1, 2$. (3p)

2. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. (3p)

3. För vilka tal c är matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 4 & 0 & c \\ 16 & 8c & 7 \end{bmatrix}$ <u>ej</u> inverterbar? Ange för ett sådant c hur första raden kan skrivas som en linjärkombination av andra och tredje. (3p)

4. Vilken lösning (x, y, z) till ekvationen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}$ uppfyller villkoret $x + y + z = 1$, där $a \in \mathbb{R}$? (3p)

5. En linje går genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(4, 5, 3)$. En annan går genom $(-1, -10, -1)$ och $(8, 2, 2)$. Bestäm det kortaste avståndet mellan linjerna. (3p)

6. Låt $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ vara en ON-bas i planet. Låt $\begin{cases} \boldsymbol{a} &= \cos\theta\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{b} &= \sin\theta\,\boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\,\boldsymbol{e}_2 \end{cases}$.
   (a) Visa att $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ är en ON-bas. (2p)
   (b) Punkten P har koordinaterna $(2, -1)$ i basen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.
   Vilka koordinater har P i basen $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$? (2p)

7. Visa att om $F : K \to M$ och $G : M \to N$ är linjära avbildningar med avbildningsmatriser A resp. B så har $G \circ F$ avbildningsmatrisen BA. (3p)

8. Antag att linjerna ℓ_1 och ℓ_2 ges av $\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = s \\ z = 1 \end{cases}$ och $\ell_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + at \\ z = 3 + 2t \end{cases}$
   Bestäm talet a så att vinkeln mellan riktningsvektorerna för ℓ_1 och ℓ_2 blir
   (a) $\pi/2$. (1p)
   (b) $\pi/3$. (2p)

9. Antag att $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \theta & 1-\theta \\ \sqrt{\theta} & 1-\sqrt{\theta} \end{bmatrix}$.
   (a) För vilka θ är $\det(\mathsf{A}) < 0$? (1p)
   (b) Låt $a_{ij,k}$ beteckna matriselementet på rad i kolonn j i matrisen A^k.
   Bevisa att $\theta = \frac{1}{4}, k \geq 3 \;\Rightarrow\; 0 < a_{ij,k} < \frac{5}{8}$. (4p)

LYCKA TILL!