Tentamen i Linjär Algebra, 5p

Distanskurs
12 januari, 2002 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://www.hh.se/staff/erja` →`teaching` →`matematik,distanskurs` →`moment 2, linjär algebra` →`020112: lösning`

1. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

2. Lös ekvationen $\mathsf{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$. (2p)

3. Låt B vara matrisen $\begin{bmatrix} c^2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 7c \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
   a) Beräkna $\det \mathsf{B}$. (2p)
   b) För vilka tal c är B inverterbar? (2p)

4. Låt π_1 och π_2 vara planen bestämda av
   $\pi_1 : x + 2y - z + 2 = 0$ och $\pi_2 : 2x + 3y + 2z = 0$.
   Dessa skär varandra längs en linje med normerad riktningsvektor $\boldsymbol{r}$. Låt $\boldsymbol{u}$ vara en vektor i planet π_1 som är parallell med xz-planet och har längd 2.
   a) Beräkna vektorprodukten $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u}$. (3p)
   b) Beräkna projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{r}$. (2p)

5. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - \frac{1}{a}y &= 1 \\ \frac{1}{1-a}x - 2y &= 1 \end{cases}$ för alla värden på a. (3p)

6. Linjen ℓ_1 går genom punkterna $P_1 = (2, 0, 1)$ och $P_2 = (1, -2, 3)$. Linjen ℓ_2 går genom punkten $P_3 = (\alpha, 7, 2)$ och har riktningsvektorn $\boldsymbol{r}_2 = (1, 2, 3)$.
   Bestäm alla värden på α så att ℓ_2 är på avståndet $\frac{1}{\sqrt{5}}$ från ℓ_1. (4p)

7. Formulera och bevisa Cramers regel i det tredimensionella fallet. (3p)

8. Visa att F är en linjär avbildning om och endast om det finns en avbildningsmatris A (d.v.s. om och endast om det finns A sådan att $F(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$). (3p)

9. Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två linjärt oberoende vektorer i planet.
   a) Bevisa geometriskt att arean av den triangel som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är lika med arean av den triangel som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. (1p)
   b) Bevisa algebraiskt att $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})|$.
   (Tips: I en triangel med vinkel α och motstående sida a och vinkel β och motstående sida b gäller sinussatsen: $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$.) (3p)

LYCKA TILL!