Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs

17 januari, 2009 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` →`Matematik 1-30` →`Delkurs 2: Linjär algebra`.
Om inget annat påpekas får du förutsätta att koordinatsystemet är ortonormerat (ON).

1. Bevisa att om $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ så är den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$

$$\tfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} \qquad \text{(3p)}$$

2. Bevisa att om A är ortogonal så är $|\det A| = 1$. (3p)

3. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ 3x - 8y &= 8 \end{cases}$ (2p)

4. Låt $\boldsymbol{u} = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3)$ och $\boldsymbol{w} = (1, -1, 0)$. Beräkna
   (a) arean av den triangel som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. (3p)
   (b) vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{w}$. (3p)

5. Bestäm kortaste avståndet mellan linjerna
   $\ell_1 = \{(3t, 1 - t, 5 + t) : t \in \mathbb{R}\}$ och $\ell_2 = \{(2 - s, 2, 2s) : s \in \mathbb{R}\}$. (3p)

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Beräkna
   (a) $\det A$. (3p)
   (b) alla egenvärdena till A och en av egenvektorerna till A. (4p)

7. Antag att $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och att $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är matrisen $A + A^{-1} - aI$ inverterbar? (3p)
   (b) Lös ekvationen $(A - I)^2 A^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{x}$ där $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (3p)

LYCKA TILL!