Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
16 januari, 2010 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

1. Formulera och bevisa Cramers regel för 3×3-matriser. (4p)

   Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 210–211.) $\square$

2. Bevisa att $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}$ för alla $\boldsymbol{r}) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. (3p)

   Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 87–88.) $\square$

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y - z &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \\ 3y - z &= 1 \end{cases}$$ (3p)

Lösning: Låt oss först numrera ekvationerna:

$$\begin{cases} x - y - z &= 0 \quad (1) \\ 2x - 3y &= 0 \quad (2) \\ 3y - z &= 1 \quad (3) \end{cases}$$

$(3') = (1) - (3) : \; x - 4y = -1$

$(2'') = (2) - 2(3') : \; 5y = 2 \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{5}$.

$\overset{(3')}{\Rightarrow}\; x = -1 + 4\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

$\overset{(3)}{\Rightarrow}\; z = -1 + 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Svar: $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{1}{5}$. $\square$

4. Låt planet π_1 vara $\pi_1 : 3x + y - z = 1$.

   (a) Bestäm skärningslinjen mellan π_1 och $\pi_2 : x + 2y + 3z = 2$. (3p)

   (b) Hur stort är (minsta) avståndet mellan π_1 och origo? (4p)

   (c) Vilka vektorer av längd 2 ger en ortogonal projektion på π_1 som har längd 1? (4p)

Lösning:

(a) Normalvektorer: $\boldsymbol{n}_1 = (3, 1, -1)$ och $\boldsymbol{n}_2 = (1, 2, 3)$. Riktningsvektor för skärningslinjen är ortogonal mot normalvektorerna: $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 =$
$= \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (5, -10, 5)$ så låt $\boldsymbol{r} = (1, -2, 1)$ varmed linjen på parameterform blir $\begin{cases} x = & t + a \\ y = & -2t + b \\ z = & t + c \end{cases}$ för några konstanter a, b, c. Värdet på dessa konstanter kan bestämmas av att välja en punkt på linjen. Denna kan fås av att eliminera (t.ex.) x ur systemet av de två planen. $3\pi_2 - \pi_1$: $(3 \cdot 1 - 3)x + (3 \cdot 2 - 1)y + (3 \cdot 3 + 1)z = 3 \cdot 2 - 1 \Leftrightarrow 5y + 10z = 5 \Leftrightarrow y = 1 - 2z$ vilket satisfieras av t.ex. $y = -1$ och $z = 1$. Insättning i π_2 ger då att $x = 2 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = 1$. Alltså ligger ligger punkten $(1, -1, 1)$ på linjen (kollas genom att se att den uppfyller ekvationerna för båda planen!) och skärningslinjen är $\begin{cases} x = & t + 1 \\ y = & -2t - 1 \\ z = & t + 1 \end{cases}$.

(b) Normalvektor till π_1 är $\boldsymbol{n}_1 = (3, 1, -1)$. Eftersom närmaste vägen från en punkt till planet alltid blir vinkerät mot planet kan vi tänka oss att vi går längs $\boldsymbol{n}_1$ tills vi är i planet, dvs om vi går $s \cdot (3, 1, -1)$ så ska detta uppfylla planets ekvation, dvs $3 \cdot (3s) + s - (-s) = 1$, dvs $s = \frac{1}{11}$. Alltså är avståndet $|\frac{1}{11}(3, 1, -1)| = \frac{1}{11}\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

(c) Kom ihåg enhetscirkeln. Vid vinkeln $\frac{\pi}{3}$ är x-koordinaten för skärningspunkten med cirkelbågen (cosinus för vinkeln) $\frac{1}{2}$ och motsvarande y-koordinat (sinus för vinkeln) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Om man tänker att radien är den vektor som ska projiceras på planet π_1 och och projektionen är linjesegmentet av x-axeln från origo till $\frac{1}{2}$. Då är förhållandena de rätta men även längderna blir rätt om man skalar upp allt med 2, så att längden av den vektor som projiceras (dvs radien i den uppskalade cirkeln) blir 2 och längden av projektionen (dvs linjesegmentet längs x-axeln) 1. Den del av normalen som utgör andra komposanten är följdaktligen dubbelt så lång som $\frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs $\sqrt{3}$. Eftersom denna normal är $\boldsymbol{n}_1 = (3, 1, -1)$ är komposanten i fråga $\sqrt{3/11}(3, 1, -1)$. För att komma åt de vektorer som utgör den andra komposanten behöver vi kunna skriva alla vektorer i planet på allmän form. Detta kan göras som linjärkombinationer av två icke-parallellla riktningsvektorer för plantet. Tre punkter i planet är (t.ex.) $P = (1, -1, 1)$, $Q = (0, 1, 0)$, $R = (0, 0, -1)$ varmed alla vektorer i planet kan skrivas som $\{a \overrightarrow{PQ} + b \overrightarrow{PR} + 1 : a, b \in \mathbb{R}\}$, dvs $(a + b + 1, -2a - b - 1, a + 2b + 1)$. De skulle ha längd 1 så med normering fås $\frac{(a+b+1, -2a-b-1, a+2b+1)}{\sqrt{6a^2+6b^2+3+10ab+8a+8b}}$. Därmed kan alla vektorer som utgör resultanten skrivas som summan av komposanterna $\{\sqrt{3/11}(3, 1, -1) + \frac{(a+b+1, -2a-b-1, a+2b+1)}{\sqrt{6a^2+6b^2+3+10ab+8a+8b}} : a, b \in \mathbb{R}\}$. $\square$

5. Låt $\boldsymbol{u} = (1,2,3)$ och $\boldsymbol{v} = (-1,0,1)$. Bilda en ON-bas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ sådan att $\boldsymbol{e}_1$ är parallell med $\boldsymbol{u}$, och $\boldsymbol{e}_2$ ligger i det plan som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. (3p)

Lösning: Om $\boldsymbol{e}_1$ ska vara normerad och parallell med $\boldsymbol{u}$ så måste $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{1+4+9}}(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$. Om $\boldsymbol{e}_2$ ligger $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$-planet kan den skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, dvs för några a och b är $\boldsymbol{e}_2 = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = (a-b, 2a, 3a+b)$. Samtidigt ska $\boldsymbol{e}_2$ vara ortogonal mot $\boldsymbol{e}_1$, dvs $(1,2,3)\cdot(a-b,2a,3a+b) = a-b+2\cdot 2a+3(3a+b) = 14a+2b = 0$. Så med $a=1$ och $b=-7$ fås $(8,2,-4) = 2(4,1,-2)$. Normerad blir därmed $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{16+1+4}}(4,1,-2) = \frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2)$. För att bestämma $\boldsymbol{e}_3$ kan vi använda det faktum att vektorprodukten av två vektorer är ortogonal mot dessa. Alltså: $(1,2,3)\times(4,1,-2) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-7,14,-7)$, så låt $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{1+4+11}}(1,-2,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. □

6. Lös ekvationen $A\boldsymbol{x} + A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(3p)

Lösning:
$A\boldsymbol{x} + A^2\boldsymbol{x} = A(I+A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = (A(I+A))^{-1}\boldsymbol{b}$.
$A(I+A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$.

Invertering av en 2×2-matris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ följer den enkla regeln
$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

Därmed är $(A(I+A))^{-1} = \frac{1}{(-1)\cdot 9-(-5)\cdot 15}\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -15 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{66}\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$

och lösningen till ekvationen är alltså slutligen

$\boldsymbol{x} = (A(I+A))^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{66}\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{66}\begin{bmatrix} -66 \\ 66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ □

7. Bestäm två egenvektorer till $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ sådana att de är lika långa och deras skalärprodukt är 1. (3p)

Lösning: $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - 3 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm 2.$

$$\lambda_1 = 2 \;\Rightarrow\; (\lambda_1 I - A)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2-1 & -3 \\ -1 & 2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 3y \\ -x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_1 = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \;\Rightarrow\; (\lambda_2 I - A)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2-1 & -3 \\ -1 & -2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x - 3y \\ -x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_2 = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{v}_1| = t\sqrt{3^2 + 1^2} = t\sqrt{10}$ och $|\boldsymbol{v}_2| = s\sqrt{1+1} = s\sqrt{2}$.

$|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| \;\Rightarrow\; s = t\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = t\sqrt{5}.$

$1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = t^2\sqrt{5}(3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = t^2\sqrt{5} \cdot 2 \;\Rightarrow\; t = \pm\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; s = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\sqrt{5}}} = \pm\sqrt{\frac{5}{\sqrt{2}}}.$

Så giltiga svar är

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v}_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v}_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad \square$$