Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
16 januari, 2010 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` → `Matematik 1-30` → `Delkurs 2: Linjär algebra`.
Om inget annat påpekas får du förutsätta att koordinatsystemet är ortonormerat (ON).

1. Formulera och bevisa Cramers regel för 3×3-matriser. (4p)

2. Bevisa att $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}$ för alla $\boldsymbol{r}) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. (3p)

3. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x - y - z &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \\ 3y - z &= 1 \end{cases}$$
(3p)

4. Låt planet π_1 vara $\pi_1 : 3x + y - z = 1$.
   (a) Bestäm skärningslinjen mellan π_1 och $\pi_2 : x + 2y + 3z = 2$. (3p)
   (b) Hur stort är (minsta) avståndet mellan π_1 och origo? (4p)
   (c) Vilka vektorer av längd 2 ger en ortogonal projektion på π_1 som har längd 1? (4p)

5. Låt $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ och $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 1)$. Bilda en ON-bas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ sådan att $\boldsymbol{e}_1$ är parallell med $\boldsymbol{u}$, och $\boldsymbol{e}_2$ ligger i det plan som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. (3p)

6. Lös ekvationen $A\boldsymbol{x} + A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$
(3p)

7. Bestäm två egenvektorer till $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ sådana att de är lika långa och deras skalärprodukt är 1. (3p)

LYCKA TILL!