Svar: Signaler och System 2011-01-11

1) Perioderna är $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/(\pi/3) = 6$ och $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 2\pi/(\pi/10) = 20$. Deras förhållande är $T_2/T_1 = 20/6 = 10/3$. De båda signalerna har den gemensamma periodensignalen $3T_2 = 10T_1 = 60 = T$, vilket då blir den fundamentala perioden för den sammansatta signalen.

2a) Överföringsfunktion och impulssvar

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \leftrightarrow h(t) = e^{-t}$$

2b) För $0 \leq t \leq 1$ gäller stegsvar

$$Y = H\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \leftrightarrow y(t) = 1 - e^{-t}$$

Från $t \geq 1$, $y_2(t-1) = y(t)$, $y_2(0) = y(1)$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = 0 \\
&sY_2(s) - y_2(0) + Y_2(s) = 0 \\
&Y_2(s) = \tfrac{y_2(0)}{s+1} \leftrightarrow y_2(t) = y_2(0)e^{-t} = (1-e^{-1})e^{-t}
\end{aligned}$$

Allstå

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) = 1 - e^{-t} & 0 \leq t \leq 1 \\ y_2(t-1) = (1-e^{-1})e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

Alternativt, inför $x(t) = u(t) - u(t-1)$

$$\begin{aligned}
&Y = HX = H(\tfrac{1}{s} - \tfrac{e^{-s}}{s}) \\
&= (\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{s+1}) - e^{-s}(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{s+1}) \\
&y(t) = (1-e^{-t})u(t) - (1-e^{-(t-1)})u(t-1)
\end{aligned}$$

2c) Faltning

$$\begin{aligned}
&y(t) = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = \\
&\overset{0\leq t\leq 1}{=} \textstyle\int_0^t e^{-\lambda}d\lambda = 1 - e^{-t} \\
&\overset{t\geq 1}{=} \textstyle\int_{t-1}^t e^{-\lambda}d\lambda = e^{-(t-1)} - e^{-t}
\end{aligned}$$

3a) Systemfunktionen är $H(s) = s/(s+2)^2$. Därför blir stegsvaret

$$Y = H\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+2)^2} \quad \mathcal{L}^{-1} \rightarrow y(t) = t\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

3b) Frekvensfunktionen är $H(i\omega) = i\omega/(i\omega+2)^2$ vilket ger amplitudkaraktärisitken $|H(i\omega)| = \omega/(\omega^2+4)$ och faskaraktäristiken $\arg H(i\omega) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\omega/2)$. Evaluera vid frekvensen $\omega = 2$: $|H(i2)| = 1/4$ och $\arg H(i2) = 0$. Frekvenssvaret blir därför

$$\begin{aligned}
&y(t) = 3|H(i2)|\cos(2t + \pi/3 + \arg H(i2)) \\
&= \tfrac{3}{4}\cos(2t + \pi/3)
\end{aligned}$$

4) Lösning med faltningssumma

$$\begin{aligned}
y[n] &= \textstyle\sum_{p=0}^n h[p]x[n-p] = \sum_{p=0}^n (\frac{1}{4})^p(\frac{1}{2})^{n-p} \\
&= (\tfrac{1}{2})^n \textstyle\sum_{p=0}^n (\frac{1}{4})^p(\frac{1}{2})^{-p} \\
&= (\tfrac{1}{2})^n \textstyle\sum_{p=0}^n (\frac{1}{2})^p = (\frac{1}{2})^n \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \\
&= (\tfrac{1}{2})^n 2(1 - (\tfrac{1}{2})^{n+1}) \\
&= 2(\tfrac{1}{2})^n - (\tfrac{1}{4})^n, \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

Lösning med Z-transform

$$\begin{aligned}
Y &= HX = \tfrac{z}{z-1/4}\tfrac{z}{z-1/2} \\
&= 2\tfrac{z}{z-1/2} - \tfrac{z}{z-1/4} \\
y[n] &= \mathbf{Z}^{-1}Y = 2(\tfrac{1}{2})^n - (\tfrac{1}{4})^n, \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

5) Skriv modellen som $y = [x \quad 1]\theta + e$ med parametervektor $\theta = [a \quad b]^T$ och x, y kolonnvektorer (e är felvektor), och inför matris $A = [x \quad 1]$. Minstakvadratmetoden ger

$$\theta = (A^TA)^{-1}A^Ty = \tfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -0.7 \\ 1.3 \end{pmatrix}$$

vilket ger $\hat{y} = A\theta = ax + b = -0.7x + 1.3$

6a) Tillståndsvektor $V = [V_1 \quad V_2]^T$ där V_1 och V_2 är signalerna efter integratorerna.

$$\begin{aligned}
&sV_1 = X - 2V_1 \\
&sV_2 = X - 3V_1 - 4V_2 \\
&Y = V_1 + V_2
\end{aligned}$$

I matrisform

$$\begin{aligned}
&sV = AV + BX \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \\
&Y = CV \qquad B = (\ 1 \quad 1\ )^T \\
&\qquad\qquad C = (\ 1 \quad 1\ )^T
\end{aligned}$$

Överföringsfunktion från X till Y

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{2s+3}{s^2+6s+8}$$

6b) Begynnelsesatsen

$y(0) = \lim_{s \to \infty} sY = \lim_{s \to \infty} sH\frac{1}{s} = H(\infty) = 0$
$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s(sY - y(0)) = \lim_{s \to \infty} sH(s) = 2$