Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
14 januari, 2012 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

1. Formulera och bevisa projektionsformeln. (3p)

   Lösning: (Se s. 65–66, *Linjär algebra* av G. Sparr.) □

2. Bevisa att $(AB)^T = B^T A^T$ för alla $m \times n$-matriser A och $n \times k$-matriser B. (3p)

   Lösning: (Se s. 124, *Linjär algebra* av G. Sparr.) □

3. Beräkna tyngdpunkten för triangeln med hörn i punkterna $(1, -1, 4)$, $(4, 3, 1)$ och $(-2, 1, 1)$. (2p)

   Lösning: $T = \frac{1}{3}((1, -1, 4) + (4, 3, 1) + (-2, 1, 1)) = (1, 1, 2)$. □

4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1-\alpha)x_1 + \beta x_2 &= \alpha \\ \beta x_1 + (1+\alpha)x_2 &= -\beta \end{cases}$$

   (a) För vilka reella tal α och β har systemet entydig lösning och vad är den? (3p)

   (b) Skriv ekvationssystemet på matrisform, dvs på formen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. (3p)

   Lösning:

   (a) Om vi kallar första ekvationen (1) och andra (2) får vi att $\beta(1) - (1-\alpha)(2)$: $(\beta^2 - (1-\alpha^2))x_2 = \alpha\beta + (1-\alpha)\beta \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2-1}$ om $\alpha^2 + \beta^2 - 1 \neq 0$ dvs om $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$. Från (2) får vi att $\beta x_1 + (1+\alpha)x_2 = -\beta$ varmed $x_1 = -1 - \frac{1+\alpha}{\alpha^2+\beta^2-1}$. Svar: Entydig lösning för $(x, y) \in \{(\alpha, \beta) : \alpha^2 + \beta^2 \neq 1; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ (dvs (α, β) ej på enhetscirkeln) och då är lösningen $(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2-1}(-\alpha - \alpha^2 - \beta^2, \beta)$.

   (b) Ekvationssystemet blir $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ om

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \beta & 1+\alpha \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

varmed ekvationen blir

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \beta & 1+\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

$\square$

5. Betrakta punkten $P = (-8, 7, -10)$, linjen $\ell : 6x = 3y = 1 - 2z$ och planet $\pi : x - 5y + 4z = 1$. Beräkna
   (a) den ortogonala projektionen av P på π. (3p)
   (b) avståndet mellan linjen ℓ och den linje som går genom P och origo. (3p)
   (c) vinkeln mellan riktningsvektorn till ℓ och normalvektorn till π. (3p)

Lösning:

(a) Normal till planet är $\boldsymbol{n} = (1, -5, 4)$. Om vi går från punkten $P = (-8, 7, -10)$ i normalens riktning till vi når planet π så hamnar vi i ortogonalprojektionen av P på π. I planet är för givna y och z $x = 1 + 5y - 4z$ dvs alla punkter $(1+5y-4z, y, z)$ ligger i π. Om vi startar i P och går t steg längs $\boldsymbol{n}$ så hamnar vi i $(-8 + 1 \cdot t, 7 - 5 \cdot t, -10 + 4 \cdot t)$. För att detta ska vara en punkt i planet ska alltså
$(x, y, z) = (-8 + t, 7 - 5t, -10 + 4t)$ där $x = -8 + t = 1 + 5y - 4z$ vilket ger ekvationssystemet $\begin{cases} t \quad -5y \quad +4z = 9 & (1) \\ 5t \quad +y = 7 & (2) \\ 4t \quad -z = 10 & (3) \end{cases}$
Gauss-elimination av ekvationssystemet ger $z = -2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = -6$ varmed projektionen är $(-6, -3, -2)$.

(b) Linjen ℓ på parameterform blir $(x, y, z) = (t, 2t, \frac{1}{2} - 3t)$. Därmed är $\boldsymbol{r}_1 = (1, 2, -3)$ en riktningsvektor för ℓ och riktningsvektor för linjen genom origo och P är just $\boldsymbol{r}_2 = (-8, 7, -10)$. En punkt på linjen ℓ är $P_2 = (0, 0, \frac{1}{2})$. Låt vektorn $\boldsymbol{u}$ vara $\overrightarrow{PP_2}$. Ortogonal mot linjerna är $\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -10 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -8 & -10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} \right) = (1, 34, 23)$ varmed avståndet är beloppet av projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{n}_2$:

$$|\boldsymbol{u}'| = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|} = \frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 34 + \frac{1}{2} \cdot 23}{\sqrt{1^2 + 34^2 + 23^2}} = \frac{23}{2\sqrt{1686}}$$

(c) Vinkeln mellan $\boldsymbol{r}_1 = (1, 2, -3)$ och $\boldsymbol{n} = (1, -5, 4)$ kan bestämmas från definitionerna av skalärprodukt och vektorprodukt. Vi har att $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{r}_1| \cdot |\boldsymbol{n}| \cdot \cos([\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}])$ varmed

$$\cos([\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}]) = \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}_1| \cdot |\boldsymbol{n}|}$$

Eftersom $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{n} = (1, 2, -3) \cdot (1, -5, 4) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -21$, $|\boldsymbol{r}_1| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ och $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{1 + 25 + 16} = \sqrt{42}$ så är $\cos([\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}]) = \frac{-21}{\sqrt{14}\sqrt{42}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alltså måste vinkeln $[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}]$ vara antingen $\frac{5\pi}{6}$ (om $\sin([\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}]) = \frac{1}{2}$) eller $\frac{7\pi}{6}$ (om $\sin([\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}]) = -\frac{1}{2}$) – detta inses genom att rita och resonera med enhetscirkeln[1]. Från definitionen av vektorprodukt har vi att $|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n}| =$

[1] Eftersom beloppet alltid är positivt syftar $[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}]$ alltid på den minsta vinkeln – enl. definitionen av vektorprodukt.

$$\left|\left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\right)\right| = |(-7,-7,-7)| = 7\sqrt{3} \text{ varmed}$$

$$\sin([\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}]) = \frac{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}_1| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{42}} = \frac{1}{2}$$

Alltså är vinkeln $\frac{5\pi}{6}$. □

6. Antag att A är en kvadratisk matris sådan att $A^3 - A = A^2$. Beräkna A^{-1}. (3p)

Lösning: $A^3 - A = A^2 \Rightarrow A(A^2 - I) = A \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot A(A^2 - I) = A^{-1} \cdot A \cdot A \Rightarrow A^2 - I = A \Rightarrow A^2 - A = I \Rightarrow A(A - I) = I$. Eftersom A^{-1} är den matris som gånger A blir I, måste A^{-1} i detta fall vara $A - I$. □

7. Låt

$$M = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Bevisa att varje element i M^n är mindre än 1 för alla positiva heltal n. (4p)

Lösning: Låt oss för enkelhets skull beteckna

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(alltså $\tilde{M} = 10M$.) Egenvärdena till $\tilde{M}$ fås av att lösa ekvationen $\det(\tilde{M} - \lambda I) = 0$. Med utveckling efter första kolonnen får vi $0 = (3-\lambda)((7-\lambda)(6-\lambda) - 4) - (5(6-\lambda) - 4) + 2(10 - 2(7-\lambda)) = 80 - 68\lambda + 16\lambda^2 - \lambda^3$. Här kan man gissa sig till att $\lambda = 2$ är en rot och då man insett det kan $\lambda - 2$ faktoriseras ut: $80 - 68\lambda + 16\lambda^2 - \lambda^3 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 14\lambda - 40)$. Löser man andragradsekvationen fås de återstående tvåegenvärdena till $\tilde{M}$: 7 ± 3. Detta innebär att egenvärdena till M är $\lambda_1 = \frac{2}{10} = 0.2$, $\lambda_2 = \frac{7-3}{10} = 0.4$ och $\lambda_3 = \frac{7+3}{10} = 1$.
Mot dessa 3 egenvärden svarar 3 egenvektorer. Om vi återigen räknar med $\tilde{M} = 10M$ får vi att $\boldsymbol{v}_1$ är den egenvektor som svarar mot egenvärdet $\lambda_1 = 2$ om $\boldsymbol{v}_1$ satisfierar $\tilde{M}\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1$. Detta ekvationssystem är underbestämt varmed det finns oänligt många lösningar och vilken som helst av dessa duger som egenvektor. På samma sätt löses systemen $\tilde{M}\boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{v}_2$ för att få egenvektorn $\boldsymbol{v}_2$ och $\tilde{M}\boldsymbol{v}_2 = 10\boldsymbol{v}_3$ för att få egenvektorn $\boldsymbol{v}_3$. Detta ger $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, -2)$ och $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$. För att diagonalisera $\tilde{M}$ blidar vi nu matriserna S och D där S är matrisen med egenvektorerna som kolonner:

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

och D är matrisen med $\tilde{M}$s egenvärden i diagonalen och nollor för övrigt:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Dessutom beräknas

$$S^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

varmed diagonaliseringen av $\tilde{M}$ blir $\tilde{M} = SDS^{-1}$ och potenser av $\tilde{M}$ enklare beräknas $\tilde{M}^n = SD^nS^{-1}$ och därigenom den efterfråde potensen av M:
$M^n = \frac{1}{10^n}SD^nS^{-1} =$

$$= \frac{1}{6\cdot 10^n}\begin{bmatrix} 3\cdot 2^{n+1} - 2^{2n} + 10^n & -3\cdot 2^{n+1} + 3\cdot 2^{2n} + 3\cdot 10^n & -2^{2n+1} + 2\cdot 10^n \\ -4^n + 10^n & 3\cdot 4^n + 3\cdot 10^n & -2^{2n+} + 2\cdot 10^n \\ -3\cdot 2^n + 2^{2n+1} + 10^n & 3(2^n - 2^{2n+1} + 10^n) & 2^{2n+2} + 2\cdot 10^n \end{bmatrix}$$

Här är matrisens första element
$\frac{3\cdot 2^{n+1}-2^{2n}+10^n}{6\cdot 10^n} = \frac{6\cdot 2^n - 2^n\cdot 2^n + 10^n}{6\cdot 10^n} < \frac{6\cdot 2^n - 2\cdot 2^n + 10^n}{6\cdot 10^n} < \frac{4\cdot 2^n + 10^n}{6\cdot 10^n} < \frac{4\cdot 10^n + 10^n}{6\cdot 10^n} < 1.$
Det åttonde elementet är $\frac{3(2^n - 2^{2n+1} + 10^n)}{6\cdot 10^n} = \frac{2^n(1-2\cdot 2^n)+10^n}{2\cdot 10^n} < \frac{2^n(1-4)+10^n}{2\cdot 10^n} < \frac{10^n}{2\cdot 10^n} < 1.$
På liknande sätt visar man även att de sju övriga elementen är < 1. $\square$